Université de Provence 2012–2013

Introduction à l'Analyse

Corrigé du devoir surveillé no 1.

Exercice 1 *Rappeler la définition de la fonction arc* cos*. Calculer la dérivée sur son domaine de dérivabilité et donner une allure de son graphe.*

La fonction $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ et qui à x associe $\cos x$ est une bijection continue et dérivable. On appelle arc cos la bijection réciproque de cette fonction.

La fonction arc cos est dérivable sur $]-1, 1[$, et comme, pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$\cos(\text{arc } \cos x) = x,$$

en dérivant cette égalité, nous obtenons

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \text{arc } \cos' x \times (-\sin(\text{arc } \cos x) = 1,$$

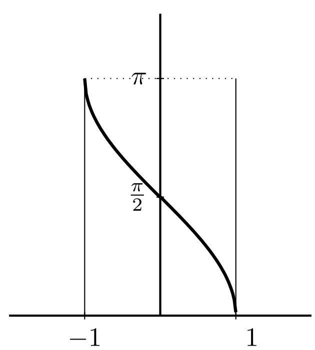
soit encore

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \text{arc } \cos' x = -\frac{1}{\sin(\text{arc } \cos x)}.$$

Comme pour tout $x \in]-1, 1[$, nous avons $\text{arc } \cos x \in]0, \pi[$, nous obtenons $\sin(\text{arc } \cos x) \geq 0$, puis $\sin(\text{arc } \cos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\text{arc } \cos x)} = \sqrt{1 - x^2}$, soit encore

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \qquad \text{arc } \cos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.}$$

L'allure du graphe de arc cos est alors la suivante :



Exercice 2 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *dans chacun des cas les équations suivantes :*

1. $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Nous avons $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$.

x est solution de l'équation proposée si et seulement si

$$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

2. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)$.

Nous avons $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$.

x est solution de l'équation proposée si et seulement si

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{6} + 2x + 2k\pi \\ \text{ou} & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{6} + x = -\frac{\pi}{6} - 2x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = -2k\pi \\ \text{ou} & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

3. $\tan x = \tan(3x - \pi)$

Il faut tout d'abord que $\tan x$ et $\tan(3x - \pi)$ soient définis, donc que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et que $3x - \pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $x \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\tan x = \tan(3x - \pi) \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \tan 3x \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ 3x = x + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\frac{\pi}{2}.$$

Dans les solutions précédentes, les multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$ ne peuvent être solutions puisque $\tan x$ n'est alors pas défini. Par contre, les multiples pairs conviennent et on a $\tan x = 0 = \tan(3x - \pi)$.

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Exercice 3 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y' = \cos x - \sin x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.*

L'équation homogène associée est $y'' + y' = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + r = 0$, soit encore $r(r+1) = 0$ et a pour racines 0 et -1.

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y(x) = A + Be^{-x}$ où A et B sont des constantes.

Cherchons une solution particulière de l'équation non homogène proposée de la forme

$$y_0(x) = A' \cos x + B' \sin x.$$

Si on reporte dans l'équation, A' et B' doivent vérifier

$$-A' \cos x - B' \sin x - A' \sin x + B' \cos x = \cos x - \sin x \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} -A' + B' = 1 \\ -A' - B' = -1 \end{cases}$$

Les solutions de ce système d'équations sont $A' = 0$ et $B' = 1$, donc $y_0(x) = \sin x$ est une solution particulière de l'équation non homogène.

Les solutions de l'équation proposée sont alors de la forme

$$y(x) = \sin x + A + Be^{-x}$$

où A et B sont des constantes.

Si on veut de plus que y vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$, alors A et B doivent satisfaire les deux équations $A + B = 0$ et $-B = 2$, ce qui nous donne $B = -2$ et $A = 2$.

$$\boxed{\text{La solution recherchée est } y(x) = \sin x - 2 + 2e^{-x}.}$$

Exercice 4 *Donner les deux expressions de la dérivée de* tan *sur son domaine de définition et dérivabilité.*

La fonction tan est définie et dérivable sur tous les intervalles de la forme $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Sur ces intervalles, on a :

$$\boxed{\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.}$$

En déduire, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ une expression de $\cos x$ en fonction de $\tan x$ et une expression de $\sin x$ en fonction de $\tan x$.

En particulier, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$, donc comme $\cos x \geq 0$, on a

$$\boxed{\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}.}$$

Enfin, comme $\sin x \geq 0$, nous avons aussi $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 x}} = \sqrt{\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}}$, donc

$$\boxed{\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}.}$$

car $\tan x \geq 0$.

Pour tout $x > 0$, simplifier

$$\cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right).$$

Si $x > 0$, alors $\arctan \frac{1}{x} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, donc d'après la question précédente

$$\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{\tan(\arctan\frac{1}{x})}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan\frac{1}{x})}}.$$

Or, pour tout réel y, on a $\tan(\arctan y) = y$, donc

$$\forall x > 0, \qquad \sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

On a alors $\arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et la question précédente implique

$$\cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \cos\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}.$$

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}.}$$

Exercice 5 *Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que x ne soit pas un multiple de π et $n \in \mathbb{N}$.*

1. Calculer

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos kx \qquad \textit{et} \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin kx$$

Nous avons

$$C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{n}{2}x} \frac{2i\sin\frac{n+1}{2}x}{2i\sin\frac{x}{2}} = e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

donc

$$\boxed{C_n(x) = \cos\frac{nx}{2} \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \sin\frac{nx}{2} \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.}$$

2. En déduire

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\cos kx \qquad \textit{et} \qquad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\sin kx$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, nous avons

$$c_n(x) + is_n(x) = -i\sum_{k=0}^{n} ike^{ikx} = -i\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)' = -i\left(\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}\right)'$$

$$= -i \times i(n+1)\frac{e^{i(n+1)x}}{e^{ix}-1} - i \times (-i)e^{ix}\frac{e^{i(n+1)x}-1}{(e^{ix}-1)^2} = \frac{(n+1)e^{i(n+1)x}(e^{ix}-1) - e^{ix}(e^{i(n+1)x}-1)}{(e^{ix}-1)^2}$$

$$= \frac{ne^{i(n+2)x} - (n+1)e^{i(n+1)x} + e^{ix}}{(e^{ix}-1)^2} = \frac{ne^{i(n+1)x} - (n+1)e^{inx} + 1}{(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})^2}$$

$$= \frac{ne^{i(n+1)x} - (n+1)e^{inx} + 1}{(2i\sin\frac{x}{2})^2} = \frac{(n+1)e^{inx} - ne^{i(n+1)x} - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

donc

$$\boxed{c_n(x) = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \qquad \text{et} \qquad s_n(x) = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.}$$

3. En déduire aussi

$$\gamma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx \qquad \textit{et} \qquad \sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2 kx$$

On a

$$\gamma_n(x) + \sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\cos^2 kx + \sin^2 kx) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

et

$$\gamma_n(x) - \sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\cos^2 kx - \sin^2 kx) = \sum_{k=0}^{n} \cos 2kx = \cos nx \, \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$$

donc

$$\boxed{\gamma_n(x) = \frac{1}{2}\left(n+1+\cos nx \, \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\right) \qquad \text{et} \qquad \sigma_n(x) = \frac{1}{2}\left(n+1-\cos nx \, \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\right)}$$

4. On rappelle que, si $n \in \mathbb{N}$ et si $k \in \mathbb{N}$ est tel que $k \leq n$, on note

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

avec la convention $0! = 1$.

Calculer

$$\Gamma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx \qquad \textit{et} \qquad \Sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx.$$

La formule du binôme nous donne

$$\Gamma_n(x) + i\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = \left(1+e^{ix}\right)^n = e^{i\frac{nx}{2}} \left(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}\right)^n = e^{i\frac{nx}{2}} \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n$$

donc

$$\boxed{\Gamma_n(x) = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos\frac{nx}{2} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_n(x) = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin\frac{nx}{2}}$$

Exercice 6 *1. Soient x et y deux nombres réels tels que $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$.*

Montrez que

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

Les hypothèses entraînent qu'on peut écrire que

$$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{\tan \arctan x + \tan \arctan y}{1 + \tan \arctan x \tan \arctan y} = \frac{x+y}{1+xy}$$

donc, comme $\arctan x + \arctan y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\boxed{\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.}$$

2. Montrez que pour tout réel positif x, on a

$$0 \leq \ arc\tan x \leq x.$$

Par définition, pour tout réel positif, $\arctan x \geq 0$.

La fonction $f : [0, +\infty[\ni x \mapsto x - \arctan x$ est continue et dérivable.

Pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0,$$

donc f est croissante. On a alors : $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$, d'où l'inégalité demandée.

$$\boxed{\forall x \geq 0, \qquad 0 \leq \arctan x \leq x.}$$

3. Calculer (en justifiant toutes les étapes très soigneusement) $4\, arc\tan \frac{1}{5} - \ arc\tan \frac{1}{239}$. On pourra pour cela utiliser l'inégalité $\frac{\pi}{2} > \frac{120}{119}$.

Nous avons $0 \leq \arctan \frac{1}{5} \leq \frac{1}{5}$, donc $0 \leq \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{5} \leq \frac{2}{5} < \frac{\pi}{2}$. Nous pouvons alors utiliser le résultat de la question 1 et nous obtenons

$$2 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \arctan \frac{10}{24} = \arctan \frac{5}{12}.$$

De même $0 \leq \arctan \frac{5}{12} \leq \frac{5}{12}$, donc $0 \leq \arctan \frac{5}{12} + \arctan \frac{5}{12} \leq \frac{10}{12} < 1 < \frac{\pi}{2}$. Nous pouvons encore utiliser le résultat de la question 1 et nous obtenons

$$4 \arctan \frac{1}{5} = 2 \arctan \frac{5}{12} = \arctan \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \arctan \frac{120}{119}.$$

Enfin, nous avons $0 \leq \arctan \frac{1}{239} \leq \frac{1}{239}$ donc

$$-\frac{\pi}{2} < -1 < -\frac{1}{239} \leq 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \leq 4 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{120}{119} \leq \frac{120}{119} < \frac{\pi}{2}.$$

Le résultat de la question 1 implique alors que

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{239} = \arctan \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}} = \arctan \frac{120 \times 239 - 119}{119 \times 239 + 120}$$

$$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice 7 *1. Trouver des réels A et B tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, on ait*

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

On doit avoir, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A}{x^2 + x}$$

donc $A+B=0$ et $A=1$, soit encore $B=-1$.

$$\boxed{\forall x>0, \qquad \frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.}$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$ l'équation différentielle

$$2xy'+y=\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

avec $y(0)=0$.

L'équation se réécrit sur $\mathbb{R}_*^+$

$$y'+\frac{y}{2x}=\frac{1}{2(x+x^2)\sqrt{x}}$$

soit encore

$$\forall x>0, \qquad \left(y'+\frac{y}{2x}\right)e^{\frac{1}{2}\ln x}=\frac{1}{2(x+x^2)\sqrt{x}}e^{\frac{1}{2}\ln x},$$

ou encore

$$\forall x>0, \qquad \left(y(x)\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2(x+x^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right).$$

On obtient alors

$$\forall x>0, \qquad y(x)\sqrt{x}=\frac{1}{2}(\ln x-\ln(x+1))+C$$

donc

$$\forall x>0, \qquad y(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\frac{x}{x+1}+\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Comme $y(1)=0$, on a $-\frac{1}{2}\ln 2+C=0$, donc $C=\ln\sqrt{2}$.

La solution recherchée est donc

$$\boxed{y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{x}}.}$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$ l'équation différentielle

$$2xy'+y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$$

avec $y(1)=0$.

Là encore, on écrit

$$\forall x>0, \qquad (y(x)\sqrt{x})'=\frac{1}{2(1+x^2)}$$

ce qui nous donne

$$\forall x>0, \qquad y(x)\sqrt{x}=\frac{1}{2}\arctan x+C$$

ou encore

$$\forall x>0, \qquad y(x)=\frac{\arctan x}{2\sqrt{x}}+\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Comme $y(1)=0=\frac{\pi}{8}+C$, on obtient $C=-\frac{\pi}{8}$ donc

$$\boxed{y(x)=\frac{\arctan x}{2\sqrt{x}}-\frac{\pi}{8\sqrt{x}}.}$$