Université d'Aix-Marseille	2012–2013

Introduction à l'Analyse

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ NO 3.

Exercice 1 *1. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes. Montrez que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si toutes les suites extraites de $(u_n)_n$ convergent vers ℓ.*

Dans un sens, si toutes les suites extraites de $(u_n)_n$ convergent vers ℓ, alors la suite $(u_n)_n$, qui est extraite de $(u_n)_n$ converge aussi vers ℓ.

Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Montrons que, quelle que soit l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ converge aussi vers ℓ.

Nous allons tout d'abord prouver que, sous les hypothèses précédentes, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi(n) \geq n.$$

Prouvons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$.

Supposons que cela soit vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. Montrons que c'est vrai au rang $n + 1$.

Nous avons $\varphi(n + 1) > \varphi(n)$. Comme $\varphi(n + 1)$ et $\varphi(n)$ sont dans $\mathbb{N}$, nous avons donc $\varphi(n + 1) \geq \varphi(n) + 1$. L'hypothèse de récurrence nous donne alors

$$\varphi(n + 1) \geq \varphi(n) + 1 \geq n + 1,$$

ce qui prouve l'inégalité au rang $n + 1$, et achève de prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Montrons à présent que, si la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ converge aussi vers ℓ.

Nous avons

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

De cela, nous déduisons que, pour tout $n \geq N$, comme $\varphi(n) \geq n \geq N$, nous avons alors $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$.

Nous avons bien prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon,$$

et ceci prouve que

la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si toutes les suites extraites de $(u_n)_n$ convergent vers ℓ.

2. (*Extrait du concours d'entrée aux CCP* 2010) *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée. La suite $(u_n)_n$ est-elle forcément convergente ? On justifiera soigneusement la réponse à cette question par une démonstration ou par un contre-exemple.*

La réponse à cette question est : non.

Par exemple, si $(u_n)_n = ((-1)^n)_n$, cette suite est bornée car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leq 1.$$

Par contre la suite $(u_{2n})_n$ qui est extraite de $(u_n)_n$ est constante et égale à 1 et converge vers 1.

Et la suite $(u_{2n+1})_n$ qui est extraite de $(u_n)_n$ est constante et égale à -1 et converge vers -1.

Comme $1 \neq -1$, il découle de cela que la suite $(u_n)_n$ ne converge pas.

Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

Exercice 2 *1. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels, décroissante et qui tend vers 0.*

Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Supposons que cela ne soit pas le cas. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N < 0$.

Comme la suite $(u_n)_n$ est décroissante, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq u_N.$$

En utilisant le théorème de passage à la limite, nous avons

$$0 = \lim_{n \to +\infty} u_n \leq u_N < 0,$$

ce qui est absurde.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

2. Montrez que toute suite de réels croissante et majorée converge.

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante majorée de réels.

Posons $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. L'ensemble A est non vide majoré, donc possède une borne supérieure s.

s est un majorant de A donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq s$.

s est le plus petit majorant de A donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon$ n'est plus majorant de A, ce qui implique que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad s - \varepsilon < u_N.$$

Comme $(u_n)_n$ est croissant, on a alors

$$\forall n \geq N, \qquad s - \varepsilon < u_N \leq u_n.$$

En particulier, nous avons

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad s - \varepsilon < u_n \leq s \leq s + \varepsilon,$$

et ceci prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers s.

Toute suite de réels croissante et majorée converge.

3. Énoncez et démontrer le théorème des suites adjacentes.

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de réels.

On suppose que $(u_n)_n$ est croissante et que $(v_n)_n$ est décroissante et que la suite $(v_n - u_n)_n$ converge vers 0. Alors $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite.

Prouvons cela. La suite $(v_n - u_n)_n$ est une suite décroissante qui converge vers 0.

D'après la première question, nous avons alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n - u_n \geq 0,$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n \geq u_n.$$

La suite $(v_n)_n$ étant décroissante, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq v_n \leq v_0.$$

La suite $(u_n)_n$ est donc croissante majorée, donc converge vers ℓ.

De même, la suite $(u_n)_n$ étant croissante, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n \geq u_n \geq u_0.$$

La suite $(v_n)_n$ est donc décroissante minorée, donc converge vers ℓ'.

Comme $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n)_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell' - \ell$, on obtient alors $\ell = \ell'$.

4. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \textit{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrez que ces deux suites convergent vers la même limite (on ne demande pas de déterminer la valeur exacte de la limite).

La suite $(u_n)_n$ est croissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$.

La suite $(v_n - u_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$ tend vers 0.

Si on montre que $(v_n)_n$ est décroissante, le théorème des suites adjacentes donnera le résultat escompté.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leq 0,$$

et ceci termine l'exercice.

Ces deux suites convergent vers la même limite.

Exercice 3 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' - 4y' + 13y = 13x^2 - 8x + 15$$

avec $y(0) = y'(0) = 0$.

L'équation caractéristique de l'équation homogène est

$$r^2 - 4r + 13 = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 = 16 - 52 = -36$.

Les solutions sont donc

$$r_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{4-6i}{2} = 2-3i.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y(x) = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

où A et B sont des constantes quelconques.

On cherche une solution de la forme $y(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.

On doit avoir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2a - 4(2ax+b) + 13(ax^2+bx+c) = 13ax^2 + (13b-8a)x + (13c-4b+2a) = 13x^2 - 8x + 15$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 13a = 13 \\ 13b - 8a = -8 \\ 13c - 4b + 2a = 15 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1. \end{cases}$$

La fonction

$$y(x) = x^2 + 1$$

est donc une solution particulière de l'équation non homogène.

La solution générale de l'équation est alors

$$y(x) = x^2 + 1 + e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

Si on veut de plus que $y(0) = y'(0) = 0$, il faut que

$$y(0) = 1 + A = 0$$

soit que $A = -1$, et que

$$y'(0) = 0 + 2A + 3B = 0$$

ce qui implique que $B = \frac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{La solution cherchée est } y(x) = x^2 + 1 + e^{2x}\left(-\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x\right).}$$

Exercice 4 *1. Déterminer les constantes A, B telles que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\} \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

En réduisant au même dénominateur le membre de droite, cela revient à chercher des constantes A et B telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A(x+1) + Bx = 1 = (A+B)x + A$$

ce qui équivaut à $A = 1$ et $B = -1$.

Nous avons donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\} \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.}$$

2. Trouver des constantes a, b et c telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

En déduire les primitives sur $]0, +\infty[$ de

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)}.$$

De même, en réduisant au même dénominateur le membre de droite, cela revient à chercher des constantes a, b et c telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a(x^2+1) + (bx+c)(x+1) = 1.$$

Faisant $x = -1$, nous avons $2a = 1$, soit $a = \frac{1}{2}$.

Faisant $x = 0$, nous avons $a + c = 1$, soit $c = \frac{1}{2}$.

Le coefficient devant x^2 est à la fois égal à 0 et égal à $a + b$, donc $b = -\frac{1}{2}$.

Nous avons alors

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1}\right)}$$

Nous obtenons donc, sur $]0, +\infty[$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{x-1}{x^2+1}dx\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

où C est une constante quelconque.

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2}\arctan x + C}$$

3. Calculer les primitives sur $]0,+\infty[$ *de*

$$\frac{\arctan x}{(x+1)^2}.$$

On pourra faire une intégration par parties.

Faisant une intégration par parties, nous avons

$$\int \frac{\arctan x}{(x+1)^2}dx = -\frac{\arctan x}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

donc

$$\boxed{\int \frac{\arctan x}{(x+1)^2}dx = -\frac{\arctan x}{x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2}\arctan x + C}$$

4. Résoudre sur $]0,+\infty[$ *l'équation différentielle*

$$x(x+1)y' + y = \arctan x.$$

Nous cherchons les solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$y' + \frac{1}{x(x+1)}y = 0.$$

Si on pose $a(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, grâce à la question 1, la fonction a admet $A(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ comme primitive.

On en déduit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} = C\frac{x+1}{x}$$

On applique maintenant la méthode de variation de la constante pour chercher une solution de l'équation non homogène de la forme

$$y(x) = \varphi(x)\frac{x+1}{x} = \varphi(x)\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Reportant dans l'équation, nous avons

$$\begin{aligned} & x(x+1)\varphi'(x)\frac{x+1}{x} - x(x+1)\varphi(x)\frac{1}{x^2} + \varphi(x)\frac{x+1}{x} = \arctan x \\ \iff \quad & (x+1)^2\varphi'(x) = \arctan x. \\ \iff \quad & \varphi(x) = \int \frac{\arctan x}{(x+1)^2}dx \end{aligned}$$

La question 2 montre qu'on peut prendre

$$\varphi(x) = -\frac{\arctan x}{x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2}\arctan x$$

et donc

$$
\begin{aligned}
y_0(x) = \varphi(x)\frac{x+1}{x} &= -\frac{\arctan x}{x} + \frac{x+1}{2x}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{x+1}{2x}\arctan x \\
&= \frac{x+1}{2x}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{x-1}{2x}\arctan x
\end{aligned}
$$

est une solution particulière de l'équation différentielle non homogène.

La solution générale de l'équation différentielle proposée est donc de la forme

$$
\boxed{y(x) = \frac{x+1}{2x}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{x-1}{2x}\arctan x + C\frac{x+1}{x}}
$$

où C est une constante quelconque.

Exercice 5 *Calculer*

$$
\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} \quad \textit{(par un changement de variable)}
$$

$$
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} \quad \textit{(poser } x = 1/u\textit{).}
$$

Pour la première intégrale, on se place sur $[1,+\infty[$ et on pose $u = \sqrt{x-1}$.

Nous avons alors $x = 1+u^2$, donc $dx = 2udu$ et

$$
\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} = \int \frac{2u\,du}{1+u^2+u} = \int \frac{2u+1}{u^2+u+1}du - \int \frac{du}{u^2+u+1}.
$$

Or

$$
\int \frac{2u+1}{u^2+u+1}du = \ln(u^2+u+1) + C
$$

et

$$
\int \frac{du}{u^2+u+1} = \int \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{du}{1+\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}du}{1+\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2}.
$$

Posons $v = \frac{2u+1}{\sqrt{3}}$ dans la dernière intégrale, nous obtenons que

$$
\int \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan v + C' = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C'
$$

où C' est une constante.

In fine, nous obtenons que, en remplaçant u par $\sqrt{x-1}$:

$$
\boxed{\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x-1}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}\right) + C}
$$

Pour la seconde intégrale, nous nous plaçons sur $[0,+\infty[$ et nous posons $x = 1/u$ ce qui nous donne $dx = -\frac{1}{u^2}du$ et

$$
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\int \frac{\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u^2}\sqrt{a^2+\frac{1}{u^2}}} = -\int \frac{u\,du}{\sqrt{a^2u^2+1}}.
$$

Posons $v = a^2u^2$, nous obtenons alors $dv = 2a^2u\,du$, donc

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a^2u^2+1}} = \frac{1}{2a^2}\int \frac{dv}{\sqrt{v+1}} = \frac{1}{a^2}\sqrt{v+1} + C = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^2u^2+1} + C$$

où C est une constante.

Revenant à la variable initiale, nous obtenons

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a^2}\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C}$$

Exercice 6 *Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = 1 \times \cdots \times n$ si $n \geq 1$ et $0! = 1$.*

1. Montrez que $e^a = 1 + \int_0^a e^x dx$. A l'aide d'une intégration par parties, montrez que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-x)e^x dx$.

Nous avons

$$\int_0^a e^x dx = [e^x]_0^a = e^a - 1,$$

donc

$$\boxed{e^a = 1 + \int_0^a e^x dx.}$$

En intégrant par parties, et en utilisant que le fait que $x - a$ est une primitive de 1, nous avons

$$\int_0^a e^x = [(x-a)e^x]_0^a - \int_0^a (x-a)e^x dx = a + \int_0^a (a-x)e^x dx$$

donc

$$\boxed{e^a = 1 + a + \int_0^a (a-x)e^x dx.}$$

2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$e^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

Nous allons prouver cela par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, cela a été prouvé dans la question précédente.

Supposons que cela soit vrai au rang n. Et montrons que c'est vrai au rang $n+1$.

Nous allons intégrer par parties en utilisant le fait que $-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ est une primitive de $\frac{(a-x)^n}{n!}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx &= \left[-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x dx \\ &= \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^a \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x dx.\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, nous obtenons alors

$$e^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^a \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx$$

ce qui prouve que l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Nous avons donc bien prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad e^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx}$$

3. On se propose de montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$$

converge vers e^a lorsque $n \to +\infty$.

3. a. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq e^a \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons, pour tout $x \in [0, a]$

$$0 \leq \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \leq \frac{(a-x)^n}{n!} e^a$$

donc

$$0 \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq e^a \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} dx = e^a \left[-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq e^a \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.}$$

3. b. On définit la suite $(v_n)_n$ par $v_n = \dfrac{a^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrez qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $0 \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

Montrez que, pour tout $n \geq n_0$, $\qquad 0 \leq v_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_{n_0}$.

Montrez que $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $0 \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$.

Nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \geq n_0$,

$$0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_{n_0}.$$

C'est vrai si $n = n_0$. Supposons que cela soit vrai pour un rang $n \geq n_0$ et montrons alors que

$$0 \leq v_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} v_{n_0}.$$

De l'inégalité, valable si $n \geq n_0$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$$

et de l'hypothèse de récurrence, nous obtenons que

$$0 \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_{n_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} v_{n_0}.$$

Ceci achève de prouver par récurrence l'inégalité demandée.

Comme la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_n$ tend vers 0, on en déduit que la suite $(v_n)_n$ tend vers 0.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_n \text{ tend vers } 0.}$$

3. c. Conclure.

De l'inégalité prouvée dans la question 3. a, on déduit que la suite

$$\left(\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx\right)_n$$

tend vers 0.

Donc, grâce à la question 2, la suite

$$\left(e^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)_n$$

tend vers 0.

Ceci prouve alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$$

existe et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = e^a.}$$