Université de Provence 2012–2013

Introduction à l'Analyse

Corrigé du Devoir surveillé blanc no 2 du 13 novembre 2012 (3h)

Exercice 1 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' - 4y' + 5y = (\cos x + 2\sin x)e^x$$

avec $y(0) = y'(0) = 0$. *On pourra rechercher une solution particulière de la forme*

$$y(x) = (A\cos x + B\sin x)e^x.$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 5 = 0$. Son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 = -4$ donc les racines sont

$$r_1 = 2 - i \qquad \text{et} \qquad r_2 = 2 + i.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

On cherche une solution particulière de la forme

$$y(x) = (A\cos x + B\sin x)e^x.$$

Nous avons

$$y'(x) = (-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x)e^x = ((A+B)\cos x + (B-A)\sin x)e^x$$

et

$$y''(x) = (-(A+B)\sin x + (B-A)\cos x + (A+B)\cos x + (B-A)\sin x)e^x = (2B\cos x - 2A\sin x)e^x$$

donc

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = ((2B - 4(A+B) + 5A)\cos x + (-2A - 4(B-A) + 5B)\sin x)e^x = ((A-2B)\cos x + (2A+B)\sin x)e^x.$$

Il faut alors que l'on ait $A - 2B = 1$ et $2A + B = 2$, ce qui nous donne $A = 1$ et $B = 0$.

La fonction

$$y(x) = e^x \cos x$$

est donc une solution particulière de l'équation non homogène.

Les solutions de l'équation sont alors de la forme

$$y(x) = e^x \cos x + e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Si nous voulons de plus $y(0) = y'(0)$, cela nous donne $1 + C_1 = 0$ et $1 + 2C_1 + C_2 = 0$, d'où $C_1 = -1$ et $C_2 = 1$.

La solution cherchée est

$$y(x) = e^x \cos x + (-\cos x + \sin x)e^{2x}.$$

Exercice 2 *Extrait du sujet des CCP (2009).*

Montrez que, pour tout $x > 0$:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Indication : on pourra dériver.

La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est continue et dérivable comme somme de composées de fonctions dérivables.

Pour tout $x > 0$, nous avons

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

La fonction f est donc constante. On en déduit que, pour tout $x > 0$, $f(x) = f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.}$$

Exercice 3 *Extrait du sujet des CCP (2010).*

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation :

$$(E) : \quad \arctan x + \arctan(x^3) = \frac{3\pi}{4}.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan x + \arctan(x^3)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f'.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de composées de fonctions dérivables.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2}{1+x^6}}$$

2. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

Il est clair que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$.

Or $\lim_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{+\infty} \arctan = +\frac{\pi}{2}$, donc

$$\boxed{f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans }]-\pi, \pi[}$$

3. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution réelle α.

Comme $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi, \pi[$, on en déduit qu'

$$\text{il existe un unique } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(\alpha) = \tfrac{3\pi}{4}.$$

4. Démontrer que pour tout réel $x \notin \{-1, 1\}$, on a :

$$\frac{x + x^3}{1 - x^4} = \frac{x}{1 - x^2}.$$

Puis résoudre l'équation :

$$\frac{x + x^3}{1 - x^4} = -1.$$

Si $x \notin \{-1, 1\}$, nous avons

$$\frac{x + x^3}{1 - x^4} = \frac{x(1 + x^2)}{(1 - x^2)(1 + x^2)} = \frac{x}{1 - x^2}$$

donc

$$\forall x \notin \{-1, 1\}, \qquad \frac{x + x^3}{1 - x^4} = \frac{x}{1 - x^2}.$$

En particulier, résoudre l'équation

$$\frac{x + x^3}{1 - x^4} = -1$$

revient à résoudre l'équation

$$\frac{x}{1 - x^2} = -1$$

avec $x \notin \{-1, 1\}$, ce qui revient à résoudre

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \text{avec } x \notin \{-1, 1\}.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 5$, donc

$$\text{Les solutions de l'équation } \frac{x + x^3}{1 - x^4} = -1 \quad \text{sont} \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

5. Simplifier l'expression $\tan(\arctan \alpha + \arctan(\alpha^3))$ *à l'aide de la formule de duplication pour tan. En déduire une valeur exacte de α.*

Comme $\arctan \alpha$ et $\arctan \alpha^3$ sont dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $\arctan \alpha + \arctan \alpha^3 = \frac{3\pi}{4}$ est différent de $\frac{\pi}{2}$ modulo π, nous pouvons appliquer la formule de duplication des tangentes, et nous obtenons que

$$-1 = \tan \frac{3\pi}{4} = \tan(\arctan \alpha + \arctan \alpha^3) = \frac{\tan \arctan \alpha + \tan \arctan \alpha^3}{1 - (\tan \arctan \alpha)(\tan \arctan \alpha^3)} = \frac{\alpha + \alpha^3}{1 - \alpha \times \alpha^3} = \frac{\alpha + \alpha^3}{1 - \alpha^4}.$$

Il découle de la question précédente que $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Or $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ étant négatif, la première solution ne peut être retenue. Nous en déduisons que la valeur exacte de α est

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 4 *D'après un exercice extrait du sujet des CCP (2011).*

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$(E): \quad xy' + y = \cos x.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrez que, pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

Posons $f : \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x - \sin x \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$.

Les fonctions f et g sont continues et dérivables. De plus, pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0.$$

On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$, donc pour tout $x \geq 0$, nous avons $\sin x \leq x$.

Pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

La fonction g' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$

$$g''(x) = -\sin x + x.$$

Il découle de ce que nous avons vu que $g''(x) \geq 0$, donc g' est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

En particulier, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) \geq g'(0) = 0$.

Donc à nouveau, g est croissante sur $\mathbb{R}^+$, ce qui nous donne $g(x) \geq g(0) = 0$ pour tout $x \geq 0$. Nous avons donc bien prouvé que

$$\boxed{\forall x \geq 0, \qquad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x}$$

2. Montrez que

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - 1}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - 1}{x}$$

existent et les calculer.

Si $x > 0$, nous avons grâce à la double inégalité précédente :

$$\frac{\frac{x - \frac{x^3}{6}}{x} - 1}{x} \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{\frac{x}{x} - 1}{x} = 0$$

donc

$$-\frac{x}{6} \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq 0.$$

Il découle de cela que

$$\boxed{\lim_{0^+} \frac{f(x)-1}{x} = 0.}$$

La fonction f est paire, donc

$$\lim_{0^-} \frac{f(x)-1}{x}$$

existe et vaut

$$-\lim_{0^+} \frac{f(x)-1}{x} = 0.$$

$$\boxed{\lim_{0^-} \frac{f(x)-1}{x} = 0.}$$

3. Montrez que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Il est clair que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On vient de plus de montrer à la question précédente que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

4. Soit x un réel non nul. Calculer $xf'(x) + f(x)$. Que peut-on en déduire ?

Si $x \neq 0$, nous avons

$$xf'(x) + f(x) = x\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) + \frac{\sin x}{x} = \cos x - \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \cos x.$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est une solution particulière sur }]-\infty, 0[\text{ et }]0, +\infty[\text{ de } (E).}$$

5. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

L'équation homogène est $xy' + y = 0$ se réécrit $(xy)' = 0$.

On en déduit que les solutions de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ sont de la forme $y(x) = C/x$ où x est une constante donc

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ et }]0, +\infty[\text{ sont de la forme } \quad y(x) = \frac{C}{x} + \frac{\sin x}{x} \quad \text{où } C \text{ est une constante.}}$$

6. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

Si $C \neq 0$, la fonction $\frac{C}{x}$ ne se prolonge pas en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la seule solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \text{ est } f.}$$

Exercice 5 *Extrait du sujet des CCP (2006).*

On note (E) *l'équation différentielle* $|x|y' + (x-1)y = x^2$.

1. Résoudre (E) *sur* $]0, +\infty[$.

Sur $\mathbb{R}^+$, l'équation différentielle (E) se réécrit $xy' + (x-1)y = x^2$.

La fonction $y(x) = x$ est une solution particulière de (E).

L'équation homogène se réécrit sur $]0, +\infty[$

$$y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right) y = 0.$$

Posons $a(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)$. Alors $A(x) = x - \ln x$ est une primitive de a sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que les solutions de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} = Ce^{\ln x - x} = Cxe^{-x}$$

où C est une constante.

$$\boxed{\text{Les solutions sur }]0, +\infty[\text{ de } (E) \text{ sont de la forme} \quad y(x) = x + Cxe^{-x} \quad \text{où } C \text{ est une constante.}}$$

2. Sachant que les solutions de (E) *sur* $]-\infty, 0[$ *sont les fonctions* $x \mapsto x + 2 + \dfrac{2}{x} + B\dfrac{e^x}{x}$, *où* $B \in \mathbb{R}$, *existe-t-il des solutions de* (E) *définies sur* $\mathbb{R}$ *? Si oui, les expliciter.*

Il faut trouver des constantes B et C telles que, si on pose

$$f(x) = x + Cxe^{-x} \qquad \forall x > 0 \text{ et}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{2}{x} + B\frac{e^x}{x} \qquad \forall x < 0,$$

la fonction f se prolonge en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E).

Or $\lim_{0+} f = 0$.

Si $x \to 0-$, alors si $B > -2$, nous avons

$$\lim_{0-} \left(\frac{2}{x} + B\frac{e^x}{x}\right) = \lim_{0-} \frac{Be^x + 2}{x} = -\infty$$

et si $B < -2$, nous avons

$$\lim_{0-} \left(\frac{2}{x} + B\frac{e^x}{x}\right) = \lim_{0-} \frac{Be^x + 2}{x} = +\infty.$$

Pour que f admette une limite finie à gauche de 0, il est donc nécessaire que B soit égal à -2.

Si $B = -2$, nous avons alors

$$\lim_{0-} \left(\frac{2}{x} + B\frac{e^x}{x}\right) = \lim_{0-} \frac{Be^x + 2}{x} = \lim_{0-} \ -2\frac{e^x - 1}{x} = -2$$

car

$$\lim_{0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(la fonction e^x est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut 1).

On en déduit alors que $\lim_{0-} f = 0$, puis que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $B = -2$, on a donc obtenu une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$.

Il reste à voir si il existe C telle que la fonction f ainsi construite soit dérivable en 0.

Pour tout $x > 0$, $f(x) = x + Cxe^{-x}$, donc la dérivée de f à droite en 0 est $1 + C$.

Pour tout $x < 0$, $f(x) = x + 2 - 2\dfrac{e^x - 1}{x}$.

Pour tout $x < 0$, nous avons

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 + 2x - 2e^x + 2}{x^2} = 1 - 2\frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Nous montrons comme précédemment, avec des études de fonctions que, pour tout $x \leq 0$, nous avons

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

donc, pour $x < 0$:

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{6} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

ce qui nous donne que $\lim_{0-} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ existe et vaut $\frac{1}{2}$, donc

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

On en déduit que la fonction ainsi construite est dérivable en 0 si $1 + C = 0$, soit si $C = -1$.

Donc

$$\boxed{\text{La fonction définie par } f(x) = x(1 - e^{-x}) \text{ si } x \geq 0,\ f(x) = x + 2 + 2\frac{1 - e^x}{x} \text{ si } x < 0 \text{ est la seule solution sur } \mathbb{R}.}$$

Exercice 6 *Extrait du sujet des CCP (2007).*

On définit les "polynômes de Tchebychev".

Pour tout entier naturel n, on définit sur $[-1, 1]$ la fonction T_n par $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Indication : on pourra calculer $T_{n+2}(x) + T_n(x)$.

Pour $x \in [-1, 1]$ et $X = \text{arc} \cos x$, nous avons

$$\begin{aligned}\cos(n+2)X + \cos nX &= \cos(n+1)X \cos X - \sin(n+1)X \sin X + \cos(n+1)X \cos X + \sin(n+1)X \sin X \\ &= 2\cos(n+1)X \cos X\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \qquad T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x).}$$

2. Calculer T_0, T_1, T_2, T_3.

Nous avons $T_0 = \cos 0 = 1$, $T_1(x) = x$. Enfin la relation de récurrence nous donne

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

et

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \qquad T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x}$$

3. Justifier que T_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que T_n est un polynôme de degré n et dont le coefficient du terme de plus haut degré est 2^{n-1}.

C'est vrai pour $n = 1$.

Supposons que cela soit vrai jusqu'au rang $n \geq 1$ et montrons que c'est vrai au rang $n+1$.

La relation de récurrence $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}x$ montre que, si T_n et T_{n-1} sont des polynômes, T_{n+1} est encore un polynôme.

Enfin, si T_n et T_{n-1} sont des polynômes de degré n et $n-1$ et à coefficients de termes de plus degrés 2^{n-1} et 2^{n-2}, nous avons

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots \qquad \text{et} \qquad T_{n-1}(x) = 2^{n-2}x^{n-1} + \cdots$$

où les points signifient qu'il s'agit de termes de degré plus bas, donc

$$T_{n+1}(x) = 2x(2^{n-1}x^n + \cdots) - (2^{n-2}x^{n-1} + \cdots) = 2^n x^{n+1} + \cdots$$

On a donc bien prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que,

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ T_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n \text{ dont le coefficient du terme de plus haut degré vaut } 2^{n-1}.}$$

4. Montrer que la fonction polynomiale T_n admet n racines distinctes que l'on précisera.

Soit $x \in [-1,1]$. On a $T_n(x) = 0$ si et seulement si $\cos(n \text{ arc} \cos x) = 0$, soit si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \text{ arc} \cos x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

ou encore

$$\text{arc} \cos x = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$$

Il faut donc que les k vérifient

$$0 \leq \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} \leq \pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{\pi}{2n} \leq k\frac{\pi}{n} \leq \pi - \frac{\pi}{2n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

car k doit être entier.

Les nombres $\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$ sont tous différents pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ dans $[0, \pi]$. La fonction cos étant bijective de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, on en déduit que les n nombres $\cos(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n})$ sont n racines distinctes de T_n. Comme T_n est un polynôme de degré n, il a au plus n racines complexes. Donc

$$\boxed{\text{Les racines de } T_n \text{ sont les } n \text{ nombres } \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) \text{ pour } k \in \{0, \ldots, n-1\}.}$$