Université d'Aix-Marseille	2012–2013

Introduction à l'analyse

CORRIGÉ DU DEVOIR À RENDRE POUR LE MARDI 9 OCTOBRE

1. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 10^x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est bijective. En écrivant que $f(x) = \exp(x \ln 10)$, expliciter f^{-1} que l'on note log.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x \ln 10}$ est strictement croissante et continue comme composée de fonctions strictement croissantes et continues (car $\ln 10 > 0$).

On en déduit que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans son image $f(\mathbb{R})$.

Comme $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}_*^+}$$

Pour $y \in \mathbb{R}_*^+$, cherchons l'unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.

On a

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{x \ln 10} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x \ln 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln y}{\ln 10} = x.$$

donc

$$\boxed{\text{pour tout } y \in \mathbb{R}_*^+, \quad f^{-1}(y) = \frac{\ln y}{\ln 10}.}$$

2. Pour tout réel x, on note $E(x)$ ou encore $[x]$ et on appelle "partie entière" de x le plus grand entier relatif n tel que $n \leq x$.

Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $[x] \leq x < [x] + 1$.

Calculer $[\pi], [\sqrt{2}], [-\pi]$.

Etudiez la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto [x] \in \mathbb{Z}$ et tracer son graphe. Cette fonction est-elle continue ? continue à droite ? continue à gauche ? Sur quel ensemble est-elle dérivable ?

Si $x \in \mathbb{R}$ et si $n = [x]$ est le plus grand entier relatif tel que $n \leq x$, alors $n + 1$ n'est pas inférieur ou égal à x, donc $n + 1 > x$. Nous avons donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad [x] \leq x < [x] + 1.}$$

De manière immédiate, nous avons

$$\boxed{[\pi] = 3, \qquad [\sqrt{2}] = 1, \qquad [-\pi] = -4.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto [x]$ est constante sur $[n, n+1[$ et vaut n.

En particulier, elle est continue sur tous ces intervalles, donc elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Par contre, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$\lim_{x \to n-} [x] = n - 1 < n = \lim_{x \to n+} [x]$$
donc

elle n'est continue en aucun point de $\mathbb{Z}$.

Comme elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, elle est donc continue à droite sur cet ensemble.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$[n] = \lim_{x \to n+} [x]$$
donc

la fonction partie entière à continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

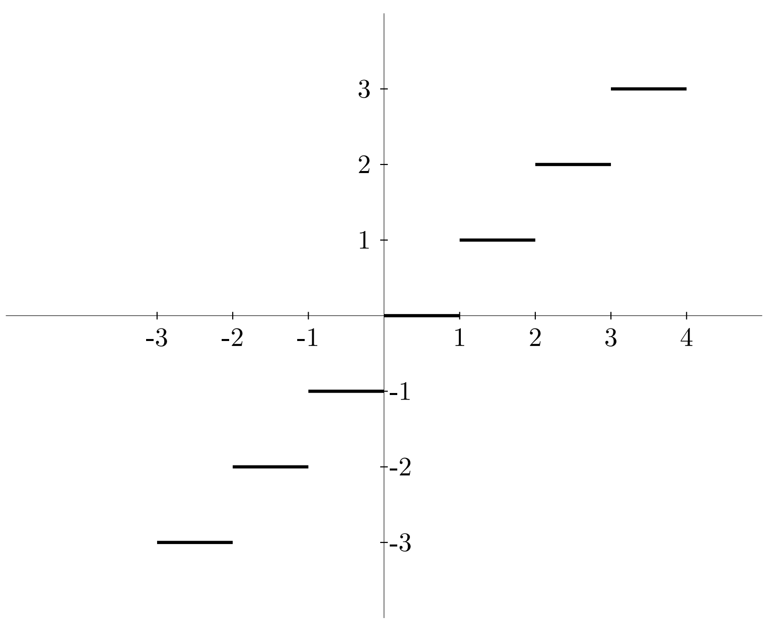
Par contre, elle n'est continue à gauche en aucun point de $\mathbb{Z}$ sinon elle serait continue en ces points.

La fonction partie entière est continue à gauche en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et n'est continue à gauche en aucun point de $\mathbb{Z}$.

La fonction partie entière étant constante sur les intervalles $[n, n+1[$ pour $n \in \mathbb{Z}$, elle est donc dérivable sur les intervalles $]n, n+1[$, donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Par contre, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$\lim_{x \to n-} \frac{[n] - [x]}{n - x} = \lim_{x \to n-} \frac{n - (n-1)}{n - x} = \lim_{x \to n-} \frac{1}{n - x} = +\infty$$
donc

La fonction partie entière est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{Z}$.



3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $(u_n)_n$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{[nx]}{n}.$$

Montrez que la suite $(u_n)_n$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers x.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[nx] \in \mathbb{Z}$, donc $\frac{[nx]}{n}$ est un rationnel.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[nx] \leq nx < [nx] + 1$$

donc

$$\frac{[nx]}{n} \leq x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n},$$

soit encore

$$x - \frac{1}{n} < \frac{[nx]}{n} \leq x.$$

Comme la suite $(\frac{1}{n})_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que

la suite $(\frac{[nx]}{n})_n$ tend vers x quand $n \to +\infty$.

4. Si n est un entier naturel et $C(n)$ désigne le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n, exprimer $C(n)$ en fonction de $\log n$ et de la partie entière.

On remarque que, pour un entier naturel n, $C(n) = 1$ si et seulement si $0 \leq n < 10$.

De même, $C(n) = 2$ si et seulement si $10 \leq n < 100$.

Puis, $C(n) = 3$ si et seulement si $100 \leq n < 1000$.

Enfin, $C(n) = k$ si et seulement si $10^{k-1} \leq n < 10^k$.

Prenant le log dans la dernière inégalité (ce qu'on peut faire puisque log est strictement croissante), on a $C(n) = k$ si et seulement si

$$k - 1 \leq \log n < k \qquad \Leftrightarrow \qquad k \leq \log n + 1 < k + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = [\log n] + 1.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad C(n) = [\log n] + 1.$$

5. Application numérique : calculer le nombre de chiffres de $9^{(9^9)}$. Supposons que vous écriviez ce nombre au rythme de deux chiffres par seconde, combien de temps vous faudra-t'il (en années, jours, heures, minutes et secondes) pour l'écrire en totalité ? On supposera pour simplifier que les années ont 365 jours.

Nous avons $\log(9^{9^9}) = 9^9 \log 9 \sim 387\,420\,489 \times 0,954242509 \sim 369\,693\,099,6$, donc

$$C(9^{9^9}) = 369\,693\,100$$

Il faudra donc 184 846 550 secondes pour écrire ce nombre, soit 3 080 775 minutes et 50 secondes, ou encore 51 346 heures, 15 minutes et 50 secondes, ou encore 2 139 jours, 10 heures, 15 minutes et 50 secondes, ou encore 5 ans, 314 jours, 10 heures, 15 minutes et 50 secondes.

Il faudra 5 ans, 314 jours, 10 heures, 15 minutes et 50 secondes pour écrire 9^{9^9}.