Université d'Aix-Marseille 2012–2013

Introduction à l'analyse

Corrigé du devoir à rendre pour le jeudi 15 novembre

Exercice 1 *Trouver toutes les appications dérivables sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$f'(x) = f(1-x). \qquad (*)$$

Si f est une fonction dérivable vérifiant $(*)$, on en déduit que f' est elle même dérivable comme composée de fonctions dérivables, donc que f est deux fois dérivable. De plus, par dérivation de $(*)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = -f'(1-x),$$

et, grâce à $(*)$ encore une fois :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(1-x) = f(1-(1-x)) = f(1-1+x) = f(x).$$

Nous obtenons donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + f(x) = 0. \qquad (E)$$

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = A\cos x + B\sin x$ où A et B sont des constantes.

Il reste à chercher les fonctions de cette forme qui vérifient $(*)$.

On doit donc avoir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -A\sin x + B\cos x = f(1-x) = A\cos(1-x) + B\sin(1-x)$$

$$= A(\cos 1 \cos x + \sin 1 \sin x) + B(\sin 1 \cos x - \cos 1 \sin x) = (A\sin 1 - B\cos 1)\sin x + (A\cos 1 + B\sin 1)\cos x$$

soit encore

$$\begin{cases} -A = A\sin 1 - B\cos 1 \\ B = A\cos 1 + B\sin 1, \end{cases}$$

ou bien encore

$$\begin{cases} B\cos 1 - A(1+\sin 1) = 0 \\ B(1-\sin 1) - A\cos 1 = 0. \end{cases}$$

Remarquons que la deuxième équation du système précédent est une conséquence de la première équation. En effet, si $B\cos 1 = A(1+\sin 1)$, alors (comme $\cos 1 \neq 0$), $B = A\dfrac{1+\sin 1}{\cos 1}$, donc $B(1-\sin 1) = A\dfrac{1-\sin^2 1}{\cos 1} = A\dfrac{\cos^2 1}{\cos 1} = A\cos 1$.

Résoudre le système précédent est donc équivalent à résoudre l'équation $B\cos 1 - A(1+\sin 1) = 0$, soit à écrire que $B = A\dfrac{1+\sin 1}{\cos 1}$.

Les solutions de l'équation $(*)$ sont donc les fonctions f de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = A\left(\cos x + \frac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x\right) = \frac{A}{\cos 1}\left(\cos 1\cos x + \sin 1 \sin x + \sin x\right)$$

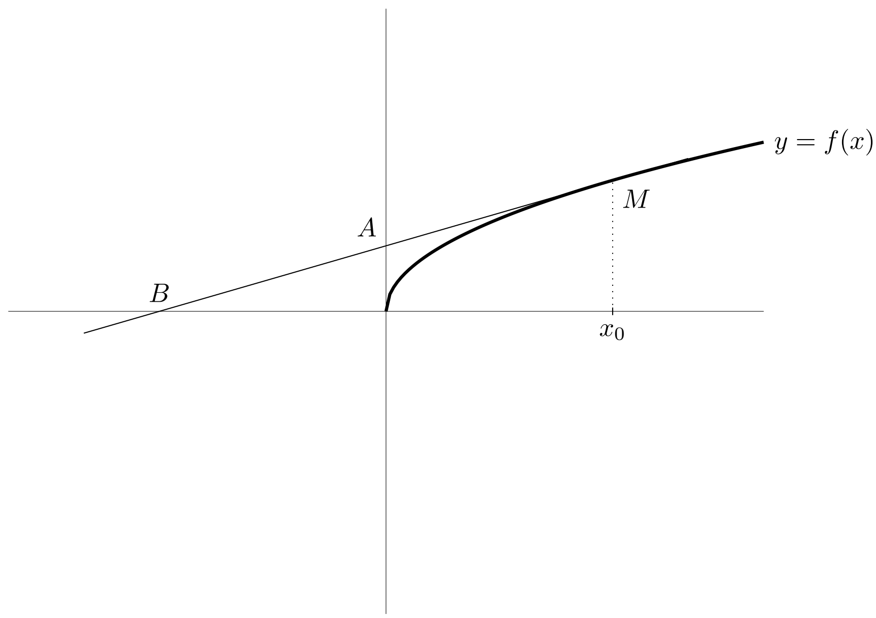
$$= \frac{A}{\cos 1}\left(\cos(x-1) + \sin x\right).$$

En notant λ la constante $\dfrac{A}{\cos 1}$ qui peut être choisie comme on le désire, on en déduit que :

> Les solutions de $(*)$ sont les fonctions de la forme
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \lambda(\cos(x-1) + \sin x)$$
> où λ est une constante quelconque.

Exercice 2 *Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que le segment de chaque tangente compris entre le point de tangence et l'axe des abscisses est divisé en deux parties égales par le point d'intersection avec l'axe des ordonnées.*

Faisons un dessin :



On cherche donc les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $x_0 > 0$, si A est l'intersection de la tangente T_{x_0} à la courbe d'équation $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ avec l'axe des x et B l'intersection de cette même tangente avec l'axe des y, on ait $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AM}$, ce qui revient à dire que l'abscisse de A est la demi-somme de l'abscisse de B et de M, ou encore que l'abscisse de B est l'opposé de l'abscisse de M.

L'équation de la tangente T_{x_0} est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Pour que cette tangente intersecte l'axe des abscisses en un point seulement, il est donc nécessaire et suffisant que $f'(x_0) \neq 0$.

En particulier, l'abscisse de B est $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Il faut donc que, pour tout x_0, nous ayons

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -x_0 \qquad \text{et} \qquad f'(x_0) \neq 0,$$

soit encore

$$\forall x_0 > 0, \qquad f'(x_0) - \frac{1}{2x_0} f(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Résolvons l'équation différentielle $y'(x) - \frac{1}{2x}y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$: posons $a(x) = -\frac{1}{2x}$. $A(x) = -\frac{1}{2}\ln x$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$, donc les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y(x) = Ce^{-A(x)} = Ce^{\frac{1}{2}\ln x} = C\sqrt{x}$.

Pour ces solutions, nous avons $y'(x) = \frac{C}{2\sqrt{x}} \neq 0$ pour tout $x > 0$, à condition bien entendu que $C \neq 0$.

En conclusion

> Les fonctions recherchées sont les fonctions de la forme
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = C\sqrt{x}$$
>
> où C est une constante quelconque non nulle.

Exercice 3 *On se propose de déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{$*$}$$

1. Soit F une primitive de f. Montrez que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad F(x+y) - F(x) = yf(x) + F(y) - F(0).$$

(intégrer par rapport à y). En déduire que f est dérivable.

En intégrant l'équation $(*)$ par rapport à y, nous avons

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^y f(x+t)dt = \int_0^y (f(x) + f(t))dt = yf(x) + \int_0^y f(t)dt.$$

Or

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^y f(x+t)dt = F(x+y) - F(x) \quad \text{et} \quad \int_0^y f(t)dt = F(y) - F(0),$$

donc

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad F(x+y) - F(x) = yf(x) + F(y) - F(0).}$$

En particulier, pour $y = 1$, nous obtenons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = F(x+1) - F(x) - F(1) + F(0).$$

Comme la fonction F est dérivable (elle a pour dérivée f) et que la somme de composées de fonctions dérivables est encore dérivable, nous en déduisons que

> La fonction f est dérivable.

2. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = f'(x).$$

En déduire que f' est constante.

La fonction f étant dérivable, nous pouvons dériver $(*)$ par rapport à x (avec y constant), et nous obtenons :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = (f(x) + f(y))' = f'(x),$$

donc

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = f'(x).}$$

En particulier, si nous faisons $x = 0$ dans l'égalité précédente, nous obtenons que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f'(0+y) = f'(y) = f'(0)$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\text{La fonction } f' \text{ est constante.}}$$

3. Conclure. Notons a la valeur de f'. Nous avons alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = a.$$

Par intégration de cette égalité, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax + b$$

où b est une constante.

Or, nous voulons que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = a(x+y) + b = f(x) + f(y) = ax + b + ay + b.$$

Cela équivaut alors à $b = b + b$, soit à $b = 0$. En conclusion :

$$\boxed{\text{Les fonctions continues } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ vérifiant } (*) \text{ sont les fonctions } f(x) = ax \text{ où } a \text{ est une constante quelconque.}}$$

Exercice 4 *En s'inspirant de l'exercice précédent, trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x)f(y) \tag{$*$}$$

Là encore, notons F une primitive de f. En intégrant l'équation $(*)$ par rapport à y, nous avons

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^y f(x+t)dt = \int_0^y (f(x)f(t))dt = f(x)\int_0^y f(t)dt.$$

Or

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^y f(x+t)dt = F(x+y) - F(x) \quad \text{et} \quad \int_0^y f(t)dt = F(y) - F(0),$$

donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad F(x+y) - F(x) = f(x)(F(y) - F(0)).$$

Si pour tout $y \in \mathbb{R}$, $F(y) - F(0) = 0$, on en déduit par dérivation de cette égalité que f est identiquement nulle.

Cherchons maintenant les solutions de $(*)$ qui ne soient pas identiquement nulles. Il existe donc $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $F(y_0) - F(0) \neq 0$.

En particulier, pour $y = y_0$, nous obtenons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{F(x+y_0) - F(x)}{F(y_0) - F(0)}.$$

Comme la fonction F est dérivable (elle a pour dérivée f) et que la somme de composées de fonctions dérivables est encore dérivable, nous en déduisons que f est dérivable.

Nous pouvons alors dériver $(*)$ par rapport à x (avec y constant), et nous obtenons :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = (f(x)f(y))' = f'(x)f(y).$$

En particulier, si nous faisons $x = 0$ dans l'égalité précédente, nous obtenons que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f'(0+y) = f'(y) = f'(0)f(y).$$

Notons $a = f'(0)$. Nous avons alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = af(x).$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = be^{ax}$$

où b est une constante.

Or, nous voulons que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = be^{a(x+y)} = f(x)f(y) = b^2 e^{ax} e^{ay}.$$

Cela équivaut alors à $b = b^2$, soit à $b = 0$ ou $b = 1$. En conclusion :

Les fonctions continues f sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$ sont, ou bien la fonction nulle, ou bien les fonctions

$$f(x) = e^{ax}$$

où a est une constante quelconque.