Université d'Aix-Marseille 2012–2013

Introduction à l'analyse

Corrigé du Devoir à rendre pour le mardi 11 décembre

La méthode de Newton pour résoudre les équations.

La tangente au point $(x_n, f(x_n))$ a pour équation

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

avec $f'(x_n) \neq 0$.

Elle intersecte l'axe des abscisses au point $(x_{n+1}, 0)$, donc

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n \quad \Leftrightarrow \quad x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}.$$

La suite $(x_n)_n$ donnée par la méthode de Newton est donc la suite définie par la donnée de $x_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Un exemple d'application : l'algorithme de Babylone.

On se propose de calculer des valeurs numériques de $\sqrt{2}$.

1. En prenant la fonction $f : [1 + \infty[\ni x \mapsto x^2 - 2$, expliciter la suite $(x_n)_n$ donnée par l'algorithme de Newton avec $x_0 = 2$.

Nous avons, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = x - \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

La suite $(x_n)_n$ obtenue est la suite définie par la donnée $x_0 = 2$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

2. On se propose de montrer que la suite ainsi construite va effectivement converger vers $\sqrt{2}$.

2. a. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est bien définie.

Il suffit de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que x_n est bien défini et que $x_n > 0$.

C'est vrai pour $n = 0$.

Supposons que cela soit vrai rang $n \in \mathbb{N}$, et montrons que c'est vrai au rang $n + 1$.

Comme

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),$$

on en déduit que x_{n+1} est bien défini et que l'on a bien $x_{n+1} > 0$. On a donc bien prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est bien définie et pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n > 0.}$$

2. b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{2})^2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 + 2 - 2x_n\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2.$$

Il découle de cela, et du fait que $x_0 \geq \sqrt{2}$ que (x_n) est minorée par $\sqrt{2}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{2})^2 \qquad \text{et} \qquad \text{la suite } (x_n)_n \text{ est minorée par } \sqrt{2}.}$$

2. c. Montrez que la suite $(x_n)_n$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + 2 - 2x_n^2) = \frac{2 - x_n^2}{2x_n}.$$

Il découle du fait que $x_n \geq 2$, que $2 - x_n^2 \leq 0$ et que $2x_n > 0$, donc que $x_{n+1} - x_n \leq 0$.

On a donc bien prouvé que

$$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est décroissante.}}$$

2. d. Montrez que la suite $(x_n)_n$ est convergente. Quelle est sa limite ?

La suite $(x_n)_n$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. Nous avons alors $\ell \geq \sqrt{2}$.

La suite $\left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)\right)_n$ converge alors vers $\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$.

Mais la suite $\left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)\right)_n$ est égale à la suite $(x_{n+1})_n$, qui est extraite de $(x_n)_n$, et elle converge donc vers ℓ.

On en déduit que

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ell}{2} = \frac{1}{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \pm\sqrt{2}.$$

Comme $\ell \geq \sqrt{2}$, on en déduit que la seule limite possible est $\ell = \sqrt{2}$.

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ converge vers } \sqrt{2}.}$$

2. e. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_n - \sqrt{2})^2.$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{\frac{3}{2}(2^n-1)}}(2 - \sqrt{2})^{2^n}.$$

Il découle de la question 2.b que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{2})^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_n - \sqrt{2})^2.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_n - \sqrt{2})^2.}$$

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{\frac{3}{2}(2^n-1)}}(2 - \sqrt{2})^{2^n}.$$

Pour $n = 0$, c'est vrai car

$$0 \leq x_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}(2^0-1)}}(2 - \sqrt{2})^{2^0}.$$

Supposons l'inégalité vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Nous avons

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_n - \sqrt{2})^2.$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{\frac{3}{2}(2^n-1)}}(2 - \sqrt{2})^{2^n},$$

donc

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2^{\frac{3}{2}(2^n-1)}}(2 - \sqrt{2})^{2^n}\right)^2 = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2^{3(2^n-1)}}\left(2 - \sqrt{2}\right)^{2^n \times 2} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}(1+2\times 2^n-2)}}\left(2 - \sqrt{2}\right)^{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}(2^{n+1}-1)}}\left(2 - \sqrt{2}\right)^{2^{n+1}}.$$

Ceci prouve ce qu'on désirait. On a donc bien prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{\frac{3}{2}(2^n-1)}}(2 - \sqrt{2})^{2^n}.}$$

2. f. En utilisant les approximations numériques $\sqrt{2} \geq 1,4$, $\quad 1,4^3 \leq 2,75$ et $\frac{0,6}{1,4^3} \leq 0,22$, montrez que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq 2,75 \times (0,22)^{2^n}.$$

Il y a une erreur d'énoncé. Il faut remplacer la constante $2,75$ par $2,83$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{\frac{3}{2}(2^n-1)}}(2-\sqrt{2})^{2^n} = 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2^{\frac{3}{2}}} \right)^{2^n}.$$

Or $2^{\frac{3}{2}} \leq 2,83$, $2-\sqrt{2} \leq 2-1,4 = 0,6$ et $2^{\frac{3}{2}} \geq 1.4^3$ donc

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{0,6}{1,4^3} \leq 0,22.$$

Ceci nous donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq 2,83 \times (0,22)^{2^n}.}$$

Majorer à l'aide de la formule précédente $x_0 - \sqrt{2}$, $x_1 - \sqrt{2}$, $x_2 - \sqrt{2}$, $x_3 - \sqrt{2}$, $x_4 - \sqrt{2}$ et $x_5 - \sqrt{2}$. On donnera les résultats sous la forme $a,b \times 10^{-n}$ où a,b désigne un nombre décimal à un chiffre après la virgule et où la décimale b sera prise par excès.

Calculer x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et regarder (sur la calculatrice) les valeurs de x_1^2, x_2^2, etc...

Pour quelle valeur de n, votre calculatrice ne fait pas de différence entre x_n^2 et 2 ?

Pour quels $n \in \mathbb{N}$ est-on sûr d'avoir $0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq 10^{-1000}$?

Nous avons

$$0 \leq x_0 - \sqrt{2} \leq 2,83 \times 0,22 \leq 6,3 \times 10^{-1}.$$

$$0 \leq x_1 - \sqrt{2} \leq 2,83 \times 0,22^2 \leq 1,4 \times 10^{-1}$$

$$0 \leq x_2 - \sqrt{2} \leq 2,83 \times 0,22^4 \leq 6,7 \times 10^{-3}$$

$$0 \leq x_3 - \sqrt{2} \leq 2,83 \times 0,22^8 \leq 1,6 \times 10^{-5}$$

$$0 \leq x_4 - \sqrt{2} \leq 2,83 \times 0,22^{16} \leq 8,6 \times 10^{-11}$$

$$0 \leq x_5 - \sqrt{2} \leq 2,83 \times 0,22^{32} \leq 9,1 \times 10^{-22}$$

Nous avons

$$x_1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{816}{577}\right) = \frac{665\,857}{470\,832}$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{665\,857}{470\,832} + \frac{2 \times 470\,832}{665\,857}\right) = \frac{886\,731\,088\,897}{627\,013\,566\,048}.$$

Nous avons (calculatrice à 16 chiffres).

$$x_1^2 = 2,25$$

$$x_2^2 = 2,006\,94\underline{4} \cdots$$

$$x_3^2 = 2{,}000\,006\,007\,304\,863\cdots$$

$$x_4^2 = 2{,}000\,000\,000\,004\,511\cdots$$

$$x_5^2 = 2.$$

En particulier, pour une calculatrice affichant 16 chiffres, $x_5^2 = 2$.

Nous sommes sûrs d'avoir

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq 10^{-1000}$$

si (en prenant le logarithme en base 10)

$$2{,}83 \times (0{,}22)^{2^n} \leq 10^{-1000} \quad \Leftrightarrow \quad \log(2{,}83) + 2^n \log(0{,}22) \leq -1000 \quad \Leftrightarrow \quad 2^n \log(0{,}22) \leq -1000 - \log(2{,}83)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n \geq -\frac{1\,000 + \log(2{,}83)}{\log(0{,}22)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\log\left(-\frac{1\,000+\log(2{,}83)}{\log(0{,}22)}\right)}{\log 2} \sim 10{,}57$$

Il faut donc prendre $n \geq 11$ pour être sûr que $0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq 10^{-1000}$.

La convergence de la suite $(x_n)_n$ vers $\sqrt{2}$ est donc extrêmement rapide.

Complément. Cet algorithme est l'algorithme implémenté dans toutes les calculatrices pour calculer la racine carrée d'un nombre réel positif quelconque.

Il est aussi possible d'avoir une expression explicite de la suite $(x_n)_n$ en fonction de n.

Posons pour cela pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}}$$

Nous avons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \sqrt{2}}{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) + \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{x_n^2 + 2 - 2x_n\sqrt{2}}{x_n^2 + 2 + 2x_n\sqrt{2}} \qquad \text{(en multipliant le haut et le bas de la fraction par } 2x_n\text{)}$$

$$= \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{(x_n + \sqrt{2})^2} = u_n^2.$$

On déduit de cela par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = u_0^{2^n} = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)^{2^n}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$u_n = \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}},$$

nous obtenons

$$x_n = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}\sqrt{2} = \frac{(2 + \sqrt{2})^{2^n} + (2 - \sqrt{2})^{2^n}}{(2 + \sqrt{2})^{2^n} - (2 - \sqrt{2})^{2^n}}\sqrt{2}.$$