Corrigé des Exercices d'approfondissement du chapitre 0.

Exercice 0.17. Supposons que $g \circ f$ soit surjective et montrons que g est surjective. Soit $z \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$. Si on pose $y = f(x) \in F$, on a $g(y) = z$, ce qui prouve la surjectivité de g.

Supposons que $g \circ f$ soit injective et montrons que f est injective. Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. On a alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Mais comme $g \circ f$ est injective, on obtient finalement que $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de f.

Exercice 0.18. Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Soit $y \in f(A \cap B)$. On en déduit qu'il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, on a $f(x) = y \in f(A)$. Et comme $x \in B$, on a $f(x) = y \in f(B)$. Et donc $f(x) = y \in f(A) \cap f(B)$, ce qui prouve que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Montrons qu'il n'y a pas l'inclusion réciproque en général. Pour cela, considérons par exemple $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x \in \mathbb{R}$. Si on prend $A =]-\infty, \pi/2]$ et $B = [\pi/2, +\infty[$, alors $A \cap B = \{\pi/2\}$, $f(A \cap B) = \{f(\pi/2)\} = \{1\}$. Cependant $f(A) = f(B) = [-1, 1]$ et donc $f(A) \cap f(B) = [-1, 1] \neq f(A \cap B)$.

Montrons que $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cap Y)$. Pour cela, on remarque que

$$x \in f^{-1}(X \cap Y) \Leftrightarrow f(x) \in X \cap Y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(x) \in X \\ \text{et } f(x) \in Y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in f^{-1}(X) \\ \text{et } x \in f^{-1}(Y) \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y).$$

Montrons que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$. Pour cela, on remarque que si $y \in f(A \cup B)$, alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, alors $y \in f(A)$ et si $x \in B$, alors $y \in f(B)$, et donc $y \in f(A) \cup f(B)$. On a donc prouvé que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Réciproquement, on a $f(A) \subset f(A \cup B)$ et $f(B) \subset f(A \cup B)$, donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. D'où $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in A$. Par définition de $f(A)$, $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$.

Il n'y a pas égalité en général. En effet, si on reprend l'exemple $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x \in \mathbb{R}$ avec $A = [0, 2\pi]$, on a $f(A) = [-1, 1]$ et $f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R} \neq A$.

Montrons maintenant que $f(f^{-1}(X)) \subset X$. Pour cela, soit $y \in f(f^{-1}(X))$. Par définition, il existe $x \in f^{-1}(X)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in f^{-1}(X)$, on en déduit que $y = f(x) \in X$.

Il n'y a pas égalité en général. En effet, si on reprend l'exemple $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x \in \mathbb{R}$ avec $X = \mathbb{R}$, alors $f^{-1}(X) = \mathbb{R}$ et $f(f^{-1}(X)) = [-1, 1] \neq X$.

Montrons que f est injective si et seulement si, pour tout sous-ensemble A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$. Supposons donc f injective. Soit A un sous-ensemble de E. On sait qu'on a $A \subset f^{-1}(f(A))$. Si $f^{-1}(f(A))$ contient strictement A, alors il existe $x' \in f^{-1}(f(A)) \setminus A$. Comme $x' \in f^{-1}(f(A)$, on a alors $f(x')$ qui est dans $f(A)$, ce qui veut dire qu'il existe $x \in A$ tel que $f(x') = f(x)$. Comme $x \in A$ et que $x' \notin A$, on en déduit que $x \neq x'$, ce qui entraîne que f n'est pas injective, et contredit l'hypothèse. On a donc bien prouvé que, si f est injective, alors, pour tout sous-ensemble A de E, on a $f^{-1}(f(A)) = A$.

Réciproquement, montrons que si pour tout sous-ensemble A de E, on a $f^{-1}(f(A)) = A$, alors f est injective. Supposons que f ne soit pas injective. Il existe alors x et x' différents, tels que $f(x) = f(x')$. Posons $A = \{x\}$. On a $f(A) = \{f(x)\}$, et donc $f^{-1}(f(A))$ contient x et x', ce qui prouve que $A \neq f^{-1}(f(A))$. On a donc bien prouvé que, si pour tout sous-ensemble A de E, on a $f^{-1}(f(A)) = A$, alors f est injective.

Montrons que f surjective implique que, pour tout sous-ensemble X de F, $f(f^{-1}(X)) = X$. Tout d'abord, on sait que $f(f^{-1}(X)) \subset X$. Il suffit de montrer l'inclusion inverse. Supposons donc que f soit surjective. Soit $y \in X$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme $y \in X$, on a $x \in f^{-1}(X)$, donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(X))$, ce qui montre que $X \subset f(f^{-1}(X))$.

Réciproquement, montrons que si pour tout sous-ensemble X de F, on a $f(f^{-1}(X))= X$ alors f est surjective. Il suffit pour cela de prendre $X = F$. On a $f(f^{-1}(F)) = F$, ce qui montre que f est surjective. D'où la conclusion.

Exercice 0.19. S'il existe une application $h : F \to G$ telle que $h \circ f = g$, alors nécessairement, si x et y sont dans E et vérifient $f(x) = f(y)$, alors $g(x) = g(y)$.

Réciproquement, supposons que cette condition nécessaire soit vérifiée. Soit $z \in F$. S'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$, alors on pose $h(z) = g(x)$. Enfin, s'il n'existe pas $x \in E$ tel que $f(x) = z$, on pose aloes $h(z) = a$ où $a \in G$ est quelconque. La fonction h est bien définie car elle est indépendante du choix de x. En effet, si $y \in E$ est tel que $f(x) = f(y)$, alors $g(x) = g(y)$.

On vérifie que $h \circ f = g$: pour cela, soit x dans E. Par construction, $h(f(x)) = g(x)$, ce qui prouve bien que $h \circ f = g$.

Exercice 0.20. Tout d'abord si $f \circ h \circ g$ est injective, alors g est injective d'après l'exercice 0.17. Toujours d'après l'exercice 0.17, si $g \circ f \circ h$ est surjective, alors g est surjective, ce qui prouve que g est bijective.

Comme $f \circ h = g^{-1} \circ g \circ f \circ h$ et que $g \circ f \circ h$ est surjective, on en déduit que $f \circ h$ est surjective, et donc f est surjective d'après l'exercice 0.17. Comme $h \circ g \circ f$ est injective, on en déduit que f est injective toujours d'après l'exercice 0.17. Et donc f est bijective.

Enfin, si f et g sont bijectives, comme $h = h \circ g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}$ et que $h \circ g \circ f$ est injective, on en déduit que h est injective. De même, comme $h = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ h$ et comme $g \circ f \circ h$ est surjective, alors h est surjective, et donc h est aussi bijective.

Exercice 0.21. $f(z)$ est définie si et seulement si $f(z) \neq -i$. Donc $D_f = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

Montrons que f est injective. Soient z et z' deux points de D_f tels que $f(z) = f(z')$. Si $w = f(z) = f(z')$, alors $\frac{z-i}{z+i} = w$, donc $z - i = w(z + i)$, soit encore $z - wz = wi + i$, soit encore $z = i\frac{w+1}{1-w}$. De même, $z' = i\frac{w+1}{1-w}$, ce qui prouve que $z = z'$ et donc que f est injective.

Enfin, w est dans l'image de f si et seulement si il existe $z \in D_f$ tel que $w = f(z)$. Le calcul précédent nous donne $z = i\frac{w+1}{1-w}$, et z existe si et seulement si $w \neq 1$. En conclusion, $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \ni z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ est une bijection ayant pour inverse $f^{-1}(z) = i\frac{z+1}{1-z}$.

Pour trouver la condition nécessaire et suffisante sur a pour que la suite définie par $z_0 = a$ et $z_{n+1} = f(z_n)$ existe, on remarque tout d'abord que z_1 existe si et seulement si $f(a)$ est définie, soit si et seulement si $a \neq -i$. On remarque ensuite que $f(z_1)$ est définie si et seulement si $z_1 \neq -i$, soit si et seulement si $z_0 \neq f^{-1}(-i) = 1$. Maintenant, $f(z_2)$ est définie si et seulement si $z_2 \neq -i$, soit si et seulement si $z_1 \neq f^{-1}(-i) = 1$. Or $z_1 = f(z_0)$, donc forcément z_1 est dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. En conclusion, z_2 est définie si et seulement si a est différent de 0 et $-i$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$\mathcal{P}(n) = \text{“Si } a \in \mathbb{C} \setminus \{-i, 1\} \text{ et si pour tout } k \leq n, \text{ on a } z_{k+1} = f(z_k) \text{ et } z_0 = a, \text{ alors } z_{n+1} \neq -i\text{”}$$

On a vu que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a $z_{n+2} = f(z_{n+1})$. Si $z_{n+2} = f(z_{n+1}) = -i$, alors $z_{n+1} = f^{-1}(-i) = 1$. Mais comme $z_{n+1} = f(z_n)$ et que l'image de f est $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, on en déduit que $z_{n+1} \neq 1$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

En conclusion, on a bien montré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que si $a \in \mathbb{C} \setminus \{-i, 1\}$ et si pour tout $k \leq n$, on a $z_{k+1} = f(z_k)$ et $z_0 = a$, alors $z_{n+1} \neq -i$. Et donc la suite (z_n) est bien définie.

Exercice 0.22. E est infini. Soit a_0 un élément de E. Si $E \setminus \{a_0\}$ était vide, alors E serait égal à $\{a_0\}$ et serait donc fini. Donc $E \setminus \{a_0\} \neq \emptyset$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments distincts de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\{a_k,\ k \leq n\} \subset E$.

C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que ce soit vrai au rang n et montrons que cela est vrai au rang $n+1$. Supposons construits $a_0, \ldots, a_n$ tels que $\{a_k,\ k \leq n\} \subset E$. Comme E est infini, on en déduit que $E \setminus \{a_k,\ k \leq n\} \neq \emptyset$. On prend alors $a_{n+1} \in E \setminus \{a_k,\ k \leq n\}$. Il est clair que $a_{n+1} \neq a_k$ pour tous les $k \leq n$, et donc la proposition est vraie au rang $n+1$.

Montrons maintenant que E est infini si et seulement si, pour tout $a \in E$, E et $E \setminus \{a\}$ sont équipotents.

Tout d'abord, on remarque que, si E est fini de cardinal $n \geq 1$, alors pour tout $a \in E$, $E \setminus \{a\}$ est de cardinal $n-1$ donc ne peut être équipotent à E.

Il reste à montrer que, si E est infini, alors pour tout $a \in E$, $E \setminus \{a\}$ et E sont équipotents. L'idée est d'utiliser le fait que c'est vrai si $E = \mathbb{N}$ car $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents, puis d'utiliser le fait que E contient un sous-ensemble dénombrable.

Soit $a \in E$. $E \setminus \{a\}$ est encore infini, donc il existe une suite (a_n) d'éléments distincts de E de telle que $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset E \setminus \{a\}$. Notons $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $A' = A \cup \{a\}$. Il est clair que A' est équipotent à A. En effet, on prend $f : A' \to A$ définie par $f(a) = a_0$, et $f(a_n) = a_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. f est clairement bijective car a_n est une suite d'éléments distincts de E et car $a \notin A$.

On définit $g : E \to E \setminus \{a\}$ par $g(x) = f(x)$ si $x \in A'$, et $g(x) = x$ si $x \notin A'$. Il reste à vérifier que g ainsi définie est une bijection. Montrons que g est injective. Soient x et x' dans E tels que $g(x) = g(x')$. Si x et x' sont tous les deux dans $E \setminus A'$, alors $g(x) = x$ et $g(x') = x'$ implique $x = x'$.

Si x et x' sont tous les deux dans A', alors $f(x) = f(x')$ et donc $x = x'$ car f est injective.

Il reste à traiter le cas où $x \in A'$ et $x' \in E \setminus A'$ (l'autre cas étant similaire). On a $g(x) = f(x)$ et $g(x') = x'$. Or $g(x) \in A \subset A'$ et $g(x') \in E \setminus A'$, et donc l'égalité $g(x) = g(x')$ est impossible. Par conséquent, g est bien injective.

Montrons que g est surjective. Soit $y \in E \setminus \{a\}$. Si $y \in E \setminus A'$, alors $g(y) = y$. Si $y \in A'$, alors comme $y \in E \setminus \{a\}$, on en déduit que $y \in A$. Comme f est bijective, il existe $x \in A'$ tel que $f(x) = y$, et on a $y = g(x)$.

En conclusion g est bien bijective.

Exercice 0.23. Montrons que f est injective. Soient (p, q) et (p', q') deux éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $f((p, q)) = f((p', q'))$. On a donc $2^p(2q + 1) = 2^{p'}(2q' + 1)$. Supposons que $p > p'$. On a $2^{p-p'}(2q + 1) = 2q' + 1$, ce qui est absurde car le nombre de gauche est pair et celui de droite est impair. Donc $p \leq p'$. Mais, de manière analogue, on ne peut avoir $p' > p$ (sinon $2q + 1 = 2^{p'-p}(2q' + 1)$), ce qui implique donc que $p = p'$. On obtient ensuite que $2q + 1 = 2q' + 1$, ce qui implique que $q = q'$. L'injectivité de f en résulte.

Montrons que f est surjectif. Pour cela, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire $n = 2^p n'$ où n' est impair. Si q est tel que $n' = 2q + 1$, on a bien $n = f((p, q))$, ce qui implique la surjectivité de f.

Comme $\mathbb{N}^*$ est équipotent à $\mathbb{N}$, on en déduit que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Exercice 0.24. Soit $f : F \to \mathbb{N}$ une bijection et $g : E \to F$ une injection. Alors $h : E \ni x \mapsto f(g(x)) \in f(g(E))$ est une bijection de E dans $f(g(E))$ (elle est injective comme composée d'injections et surjective par construction). En particulier, si $f(g(E))$ est finie, E est fini de même cardinal. Et si $f(g(E))$ est infini, il faut montrer que $A = f(g(E))$ est équipotent à $\mathbb{N}$.

Soit donc A une partie infinie de $\mathbb{N}$. Montrons que A est équipotent à $\mathbb{N}$. Pour cela, on construit une bijection ϕ de $\mathbb{N}$ sur A en posant $\phi(0) = \min A$, $\phi(1) = \min(A \setminus \{\phi(0)\})$, ..., $\phi(n + 1) = \min(A \setminus \{\phi(0), \ldots, \phi(n)\}$. La fonction ainsi construite est clairement strictement croissante donc injective. Il reste à vérifier qu'elle est surjective. Pour cela, si $p \in A$, on prend pour n le cardinal de l'ensemble des éléments de A inférieurs ou égaux à p auquel on retranche 1, *ie.* $n = |\{k \in A,\ k \leq p\}| - 1$. Alors $\{k \in A,\ k \leq p\} = \{\phi(0) < \phi(1) < \cdots < \phi(n)\}$, ce qui montre que $\phi(n) = p$ et que ϕ est surjective.

Montrons maintenant qu'un ensemble E est dénombrable si et seulement si il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$. Tout d'abord, si E est dénombrable, E est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, donc il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.

Maintenant, s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$, alors E est dénombrable d'après ce qui précède.

Exercice 0.25. Si $f : \mathbb{N} \to E$ est surjective, alors il existe $g : E \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = Id_E$. g est alors injective et E est dénombrable d'après l'exercice précédent.

Exercice 0.26. Si E est dénombrable, alors il existe une surjection f de $\mathbb{N}$ dans E d'après l'exercice précédent. En particulier, si g est une surjection de E dans F, alors $g \circ f$ est une surjection de $\mathbb{N}$ dans F, donc F est dénombrable d'après l'exercice précédent.

Exercice 0.27. Tout d'abord, si E_1 et E_2 sont dénombrables alors, il existe deux injections ϕ_1 et ϕ_2 de E_1 et E_2 dans $\mathbb{N}$. Et donc, $\phi : E_1 \times E_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (\phi_1(x_1), \phi_2(x_2)) \in \mathbb{N}^2$ est une injection de E dans $\mathbb{N}^2$. En particulier, $E_1 \times E_2$ est dénombrable d'après l'exercice 0.24 et 0.23.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$\mathcal{P}(n) =$ "Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles dénombrables,
alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est dénombrable"

On a vu que $\mathcal{P}(2)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Pour cela, on remarque que $E_1 \times \cdots \times E_n \times E_{n+1}$ est équipotent à $(E_1 \times \cdots \times E_n) \times E_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $(E_1 \times \cdots \times E_n)$ est dénombrable et donc $(E_1 \times \cdots \times E_n) \times E_{n+1}$ est aussi dénombrable, ce qui implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Exercice 0.28. Les E_i sont dénombrables. D'après l'exercice 0.25, il existe des surjections f_i de $\mathbb{N}$ dans E_i. Soit $f : I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} E_i$ qui à (i, n) associe $f_i(n)$. f est surjective : en effet si $N \in \bigcup_{i \in I} E_i$, alors il existe $i \in I$ tel que $N \in E_i$ et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = f_i(n)$ car $f_i : \mathbb{N} \to E_i$ est surjective. D'où la surjectivité de f. Comme $I \times \mathbb{N}$ est dénombrable, on en déduit que $\bigcup_{i \in I} E_i$ est aussi dénombrable.

Exercice 0.29. $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-n, n\}$ et une réunion dénombrable d'ensembles finis. Donc $\mathbb{Z}$ est dénombrable d'après l'exercice précédent.

$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{p/q,\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ |p| \leq n, |q| \leq n\}$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis. Donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable d'après l'exercice précédent.

De même, l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}([0, n])$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis.

Exercice 0.30. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_n$, alors $f(n) = f_n(n)$. Or $f(n) = f_n(n)+1$. C'est absurde.

Si $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ était dénombrable, il existerait une suite de fonctions f_n telle que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Or la fonction f précédemment construite n'est pas dans $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Contradiction.

Exercice 0.31. Si $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ était dénombrable, il existerait une suite de fonctions $(f_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Si on définit $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ par $f(n) = 1 - f_n(n)$, alors $f \notin \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. (En effet, si $f \in \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, on a $f(n) = 1 - f_n(n) = f_n(n)$, ce qui est absurde). Donc $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 0.32. Montrons que $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n} \in \mathbb{R}$ est injective. Soit x et y dans $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tels que $x \neq y$. Soit $n_0 = \inf\{n \in \mathbb{N},\ x_n \neq y_n\}$. Alors

$$f(x) - f(y) = \frac{x_{n_0} - y_{n_0}}{3^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{3^n}$$

Or $\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{3^n}\right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2 \times 3^{n_0}}$ et donc, si $f(x) = f(y)$, on a $|\frac{x_{n_0} - y_{n_0}}{3^{n_0}}| = \frac{1}{3^{n_0}}$ car $x_{n_0} - y_{n_0} = \pm 1$ et $|\frac{x_{n_0} - y_{n_0}}{3^{n_0}}| = |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{3^n}| \leq \frac{1}{2 \times 3^{n_0}}$, ce qui est absurde.

En particulier, f est une injection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{R}$ était dénombrable, on aurait une injection g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$. Et donc, $f \circ g$ serait une injection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui impliquerait la dénombrabilité de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Absurde.

Si $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ était dénombrable, comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on aurait $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ dénombrable. Absurde.

Exercice 0.33. Soit $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ni A \mapsto \mathbb{1}_A \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{1}_A$ désigne la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = 1$ si $n \in A$, $x_n = 0$ sinon.

Montrons que Φ est injective. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Supposons $\Phi(A) = \Phi(B)$. On en déduit que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ et donc $n \in A \;\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_A(n) = 1 \;\Leftrightarrow \mathbb{1}_B(n) = 1 \;\Leftrightarrow\; n \in B$, ce qui implique $A = B$ et l'injectivité de Φ.

Montrons que Φ est surjective. Soit $(x_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On pose $A = \{n \in \mathbb{N},\; x_n = 1\}$. Alors, $(x_n)_n = \mathbb{1}_A$.

Exercice 0.34.

a. $\mathbb{Z}_m[X] = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_m^N[X]$ avec $\mathbb{Z}_m^N[X] = \{P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \in \mathbb{Z}[X],\; |a_0| \leq N, \ldots, |a_m| \leq N\}$. C'est donc une réunion dénombrable d'ensembles finis.

b. L'ensemble des zéros des polynômes de $\mathbb{Z}_m[X]$ est égal à $\bigcup_{P \in \mathbb{Z}_m[X]} \{x \in \mathbb{R},\; P(x) = 0\}$. C'est donc une réunion dénombrable d'ensembles finis de cardinaux inférieurs ou égaux à m (car un polynôme de degré inférieur ou égal à m a au plus m racines). On le note Z_m.

c. L'ensemble des nombres algébriques est la réunion des Z_m. C'est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

d. Si T est l'ensemble des nombres transcendants, et A celui des nombres algébriques, on a $\mathbb{R} = T \cup A$. On a vu que A est dénombrable. Si T était dénombrable, $\mathbb{R}$ le serait aussi. Donc T est non dénombrable.

Exercice 0.35. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \leq e^t$$

Pour $n = 0$, c'est vrai. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Posons $f_{n+1} : [0, +\infty[\ni x \mapsto e^t - \sum_{k=0}^{n+1} t^k/k!$. f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée $f'_{n+1}(t)$ vaut $f_n(t)$ et est positive d'après l'hypothèse de récurrence. Donc f_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui implique que, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f_{n+1}(t) \geq f_{n+1}(0) = 0$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Exercice 0.36. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad |\sin nt| \leq n|\sin t|.$$

Pour $n = 0$, ou $n = 1$, c'est vrai. Supposons que cela soit vrai au rang n. Montrons que cela est vrai au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned} |\sin(n+1)t| = |\sin nt \cos t + \cos nt \sin t| &\leq |\sin(nt)| + |\sin t| \\ &\leq n|\sin t| + |\sin t| = (n+1)|\sin t|. \end{aligned}$$

Donc, c'est vrai au rang $n+1$.

Exercice 0.37. $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence. En effet, si $X \in \mathcal{P}(E)$, on a bien $X \mathcal{R} X$ car $A \cap X = A \cap X$. Si $X \in \mathcal{P}(E)$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$, on a bien $X \cap A = Y \cap A$ qui implique $Y \cap A = X \cap A$. Si $X \in \mathcal{P}(E)$, $Y \in \mathcal{P}(E)$ et $Z \in \mathcal{P}(E)$, on a bien $X \cap A = Y \cap A$ et $Y \cap A = Z \cap A$ qui entraîne $X \cap A = Z \cap A$. Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Soit $f : [X] \mapsto X \cap A$. On va montrer que f est une bijection de $E/\mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}(A)$. Tout d'abord, f est bien définie. En effet, si $[X] = [X']$, on a $f([X]) = f([X'])$ (l'image d'une classe par f ne dépend pas du représentant de la classe choisi). f est injective car si $f([X]) = f([Y])$, alors $X \cap A = Y \cap A$ et donc $[X] = [Y]$. Enfin f est surjective car, si $B \in \mathcal{P}(A)$, alors $B = f([B])$.

En particulier, le cardinal de $E/\mathcal{R}$ est égal au cardinal de $\mathcal{P}(A)$ qui vaut 2^n.

Exercice 0.38. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On a $A \subset (A \cup B)$. Donc tout majorant de $A \cup B$ est un majorant de A, ce qui implique que $\sup(A \cup B)$ est un majorant de A et donc $\sup A \leq \sup(A \cup B)$. De même, $\sup B \leq \sup(A \cup B)$ et donc $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$.

Réciproquement, $\max(\sup A, \sup B) \geq \sup A$, donc $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de A. De même, $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de B, donc $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$, ce qui implique que $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.

En conclusion, on a $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Si $x \in A$ et $y \in B$, on a $x + y \leq \sup A + \sup B$. En particulier, $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$, donc $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.

Montrons que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. $\sup A - \varepsilon$ n'est plus majorant de A donc il existe x_ε dans A tel que $x_\varepsilon > \sup A - \varepsilon$. De même, il existe y_ε dans B tel que $y_\varepsilon > \sup B - \varepsilon$. On a alors $x_\varepsilon + y_\varepsilon > \sup A + \sup B - 2\varepsilon$, et donc

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A + B) + 2\varepsilon.$$

Si on avait $\sup A + \sup B > \sup(A + B)$, alors pour $\varepsilon = \frac{1}{4}(\sup A + \sup B - \sup(A + B))$, on aurait $\sup A + \sup B > \sup(A + B) + 2\varepsilon$ ce qui est absurde. On a bien prouvé que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 0.39. $\sup f = \sup f(X)$. Comme $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$, on a $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$. Enfin il n'y a pas égalité en général. En effet, si on prend $f : \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ qui à 0 associe -1 et qui à 1 associe 1 et si $g = -f$, alors $\sup f = \sup g = 1$ et $f + g = 0$.