Corrigé des Exercices d'approfondissement du chapitre 1.

Exercice 1.28. Pour a), c'est faux. Par exemple $d(2,-2) = 0$ alors que $2 \neq -2$.

Pour b) et c) c'est vrai et cela se vérifie immédiatement en utilisant l'inégalité triangulaire classique pour la valeur absolue.

Pour d), c'est clair.

Pour e), la seule difficulté est de montrer que, si f est continue alors $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$ implique $f = 0$. Pour cela, on introduit $F : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$. F est de classe C^1 car c'est la primitive d'une fonction continue, croissante car sa dérivée $|f|$ est positive. Et donc, si $x \in [a,b]$, on a $0 = F(a) \leq F(x) \leq F(b) = 0$, ce qui implique que F vaut identiquement 0, et que sa dérivée $F' = |f|$ aussi. On a bien obtenu que $f \equiv 0$.

Pour f), c'est faux. Par exemple si $f(x) = 0$ pour $x \in]a,b]$ et si $f(a) = 1$, alors $d(f,0) = 0$ et pourtant $f \neq 0$.

Exercice 1.29.

1. Soient x, y et z dans E. Si $x = y$, alors $d'(x,y) = f(d(x,y)) = f(0) = 0$. Si $x \neq y$, alors $d(x,y) > 0$ et donc $d'(x,y) = f(d(x,y)) > f(0) = 0$ car f est strictement croissante.

Il est clair que $d'(x,y) = d'(y,x)$.

Enfin, $d'(x,z) = f(d(x,z))$. Comme $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ et que f est croissante, on a $d'(x,z) \leq f(d(x,y) + d(y,z))$. Comme f est sous-additive, on a $f(d(x,y) + d(y,z)) \leq f(d(x,y)) + f(d(y,z))$ et donc $d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z)$.

2. il suffit de vérifier que $f_1(x) = \frac{x}{1+x}$, $f_2(x) = \log(1+x)$, $f_3(x) = \log(1 + \frac{x}{1+x})$ et $f_4(x) = x^\alpha$ sont strictement croissantes, sous-additives et valent 0 en 0.

Pour la première, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée vaut $\frac{1}{(1+x)^2}$ qui est strictement positive donc f_1 est strictement croissante. Enfin,

$$f_1(u+v) = \frac{u+v}{1+u+v} = \frac{u}{1+u+v} + \frac{v}{1+u+v} \leq \frac{u}{1+u} + \frac{v}{1+v} = f_1(u) + f_1(v).$$

Pour la seconde, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée vaut $\frac{1}{1+x}$ qui est strictement positive donc f_2 est strictement croissante. Enfin,

$$f_2(u+v) - f_2(u) - f_2(v) = \log(1+u+v) - \log(1+u) - \log(1+v) =$$
$$= \log\left(\frac{1+u+v}{(1+u)(1+v)}\right) = \log\left(\frac{1+u+v}{1+u+v+uv}\right) \leq \log\left(\frac{1+u+v}{1+u+v}\right) = 0$$

Pour la troisième, on remarque que $f_3 = f_2 \circ f_1$.

Enfin, pour la quatrième, on remarque que f_4 est dérivable et que sa dérivée vaut $\alpha x^{\alpha-1}$ qui est strictement positive donc f_4 est strictement croissante. Enfin,

$$f_4(u+v) = (u+v)^\alpha = ((u^{1/p})^p + (v^{1/p})^p)^{\frac{1}{p}}$$

avec $p = \frac{1}{\alpha} > 1$. L'inégalité de Minkowski implique

$$((u^{1/p})^p + (v^{1/p})^p)^{\frac{1}{p}} \leq (u^{1/p}) + (v^{1/p}) = u^\alpha + v^\alpha,$$

et donc $f_4(u+v) \leq f_4(u) + f_4(v)$.

Exercice 1.30.

1. Si x, y et z sont dans E, on a $d(x,y) = d(y,x)$ et $d(x,z) = |f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = d(x,y) + d(y,z)$.
   Enfin, $d(x,y) = 0$ implique $x = y$ si et seulement si f est injective.
2. e^x est injective donc d est une distance. Si x est dans $\mathbb{R}$ et $r > 0$ alors $y \in B(x,r)$ si et seulement $|e^x - e^y| < r$, soit si et seulement si $e^x - r < e^y < e^x + r$. On a donc deux cas : si $e^x - r \leq 0$ c'est à dire si $r \geq e^x$, on a $B(x,r) =]-\infty, \log(e^x + r)[$. Sinon, si $r < e^x$, on a $B(x,r) =]-\log(e^x - r), \log(e^x + r)[$.

Exercice 1.31. Il est clair que $d'(x,y) = d'(y,x)$ et que $d'(x,y) = 0$ équivaut à $x = y$. Pour l'inégalité triangulaire, il suffit de montrer que $f(x) = \inf(1,x)$ est sous-additive, c'est-à-dire que, pour tous $x, y \geq 0$,

$$\inf(1, x+y) \leq \inf(1,x) + \inf(1,y).$$

Soit $y \in \mathbb{R}^+$ fixé. Considérons $g_y(x) = \inf(1,x) + \inf(1,y) - \inf(1,x+y)$. Si $0 \leq y \leq 1$ et si $x \leq 1 - y$ alors $g_y(x) = x + y - (x+y) = 0$, tandis que, si $1 - y \leq x \leq 1$, $g_y(x) = x + y - 1 \geq 0$, et enfin si $1 \leq x$, alors $g_y(x) = 1 + y - 1 = y \geq 0$.

Si maintenant $1 \leq y$ et si $0 \leq x \leq 1$, alors $g_y(x) = x + 1 - 1 = x \geq 0$, tandis que, si $1 \leq x$, alors $g_y(x) = 1 + 1 - 1 = 1 \geq 0$.

On a bien prouvé que f est sous-additive, et donc que d' est une distance.

Exercice 1.32. Il suffit de vérifier que

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

sont des normes sur $C([a,b], \mathbb{R})$. Tout d'abord $\|f\|_p = 0$ implique $f = 0$ en faisant comme pour la question e) de l'exercice 1.28. Les seuls points délicats à vérifier sont l'inégalité triangulaire. Pour $\|\cdot\|_\infty$, si f et g sont dans $C([a,b], \mathbb{R})$ et si $x \in [a,b]$, alors

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

et donc

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Soit $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$, pour $\|\cdot\|_p$, si f et g sont dans $C([a,b], \mathbb{R})$, on montre d'abord que l'on a l'inégalité

$$\int_a^b |f(t)||g(t)| \, dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En effet, si $\|f\|_p$ ou $\|g\|_q$ vaut 0, alors d'après la question e) de l'exercice 1.28, f ou g vaut 0 et donc l'inégalité est claire. Supposons donc $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$. D'après le lemme 1.2.4, on a

$$\forall t \in [a,b], \quad \frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \frac{|g(t)|}{\|g\|_p} \leq \frac{|f(t)|^p}{p\|f\|_p} + \frac{|g(t)|^q}{q\|g\|_q}.$$

Intégrant cette inégalité entre a et b, on obtient

$$\int_a^b |f(t)||g(t)|\,dt \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Ensuite, on prouve l'inégalité de Minkowski. On pose $h = |f| + |g|$. On a

$$\int_a^b (h(t))^p\,dt = \int_a^b (h(t))^{p-1}|f(t)|\,dt + \int_a^b (h(t))^{p-1}|g(t)|\,dt.$$

On applique ensuite l'inégalité précédente à chacune des intégrales du membre de droite dans l'égalité ci-dessus et on obtient :

$$\int_a^b (h(t))^p\,dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (h(t))^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (h(t))^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Or $(p-1)q = p$ et $1 - 1/q = 1/p$. En particulier, si on divise les deux membres de cette inégalité par

$$\left(\int_a^b (h(t))^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

on obtient l'inégalité de Minkowski.

Exercice 1.33.

1. Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$, et donc $d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{2}d_\infty$. En particulier, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour d_2, alors pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $B_{d_2}(x, \varepsilon_x) \subset U$ et donc $B_{d_\infty}(x, \frac{\varepsilon_x}{\sqrt{2}}) \subset B_{d_2}(x, \varepsilon_x) \subset U$ ce qui montre que U est ouvert pour d_∞.

De même, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour d_∞, alors pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $B_{d_\infty}(x, \varepsilon_x) \subset U$ et donc $B_{d_2}(x, \varepsilon_x) \subset B_{d_\infty}(x, \varepsilon_x) \subset U$ ce qui montre que U est ouvert pour d_2.

On a bien montré que d_∞ et d_2 définissent les mêmes ouverts.

2. $A \times B$ est ouvert pour d_2 si et seulement si il est ouvert pour d_∞.

Si A et B sont ouverts dans $\mathbb{R}$, montrons que $A \times B$ est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ pour d_∞. Soit $(a, b) \in A \times B$. Comme $a \in A$ et que A est ouvert, alors il existe $\varepsilon_a > 0$ tel que $]a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a[\subset A$. De même, il existe $\varepsilon_b > 0$ tel que $]b - \varepsilon_b, b + \varepsilon_b[\subset B$. Posons $\varepsilon = \min(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$. ε est strictement positif car ε_a et ε_b le sont. De plus $B_{d_\infty}((a, b), \varepsilon) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\times]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\subset A \times B$ ce qui montre que $A \times B$ est ouvert.

Réciproquement, si $A \times B$ est ouvert et si $a \in A$, $b \in B$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{d_\infty}((a, b), \varepsilon) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\times]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\subset A \times B$, ce qui montre que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$ et $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\subset B$, et donc que A et B sont ouverts.

On a donc bien montré que $A \times B$ est ouvert de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si A et B sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.34. Prenons $E = \mathbb{N}$ muni de la métrique $d(x, y) = |x - y|$.

1. Par exemple, la boule ouverte de centre 1 et de rayon 1 ne contient que le point 1, donc est fermée. De même la boule fermé de centre 1 et de rayon 1 est aussi la boule ouverte de centre 1 et de rayon 3/2.

2. les exemples de la question précédente répondent à la question

3. idem

4. Si x et y sont dans $B(a,r)$, alors $d(a,x) < r$ et $d(a,y) < r$ donc $d(x,y) \leq d(a,x) + d(a,y) < 2r$. En particulier,

$$\sup_{x,\ y \in B(a,r)} d(x,y) \leq 2r.$$

Si on se place toujours dans $\mathbb{N}$ muni de la distance usuelle, alors la boule ouverte de centre 1 et de rayon 1 est réduite à $\{1\}$ et son diamètre vaut 0.

5. Si $E = [a, +\infty[$ muni de la distance induite par la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, alors $[a, b[$ est la boule ouverte de centre $(a+b-1)/2$ et de rayon $(b-a+1)/2$.

De même, si $E =]-\infty, b[$, alors $[a, b[$ est la boule fermée de centre $(a+b+1)/2$ et de rayon $(b-a+1)/2$.

Exercice 1.35.

1. Tout d'abord $B'(a,r)$ est un fermé contenant $B(a,r)$ donc $\overline{B(a,r)} \subset B'(a,r)$ d'après la proposition 3.2.3. Il reste donc à vérifier que $B'(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$, soit encore que tout point x tel que $d(a,x) = r$ est dans $\overline{B(a,r)}$ (puisque si $d(a,x) < r$, alors $x \in B(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$).

Soit donc x tel que $d(a,x) = r$. Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que $B(a,r) \cap B(x,\varepsilon)$ est non vide. Pour cela, on prend $x_\varepsilon = (1-\lambda)a + \lambda x$ (c'est à dire que x_ε est dans le segment $[a,x]$) avec λ choisi dans $[0,1]$ de façon à ce que x_ε soit dans $B(a,r) \cap B(x,\varepsilon)$.

Pour que x_ε soit dans $B(a,r)$, il faut et il suffit que $d(x_\varepsilon, a) < r$, soit $\|\lambda x + (1-\lambda)a - a\| = \lambda\|x-a\| = \lambda r < r$. Et donc x_ε est dans $B(a,r)$ si et seulement si $\lambda < 1$.

De même, x_e est dans $B(x,\varepsilon)$ si et seulement si $\|(1-\lambda)a + \lambda x - x\| = (1-\lambda)\|a-x\| = (1-\lambda)r < \varepsilon$.

Et donc, si on choisit λ dans $]1-\varepsilon/r, 1[$, alors x_ε est dans $B(a,r) \cap B(x,\varepsilon)$.

Montrons maintenant que $B(a,r) = (B'(a,r))^\circ$. Pour cela, on remarque que $B(a,r)$ est un ouvert contenu dans $B'(a,r)$ et donc $B(a,r) \subset (B'(a,r))^\circ$ d'après la proposition 3.3.2.

Il reste à vérifier que $B'(a,r)^\circ \subset B(a,r)$. Soit donc $x \in (B'(a,r)^\circ)$. En particulier, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset B'(a,r)$ d'après l'exercice 1.13. Montrons que $x \in B(a,r)$. Supposons le contraire, c'est à dire que $\|x-a\| = r$. Alors, si $x_\varepsilon = a + (x-a)(1+\varepsilon/(2r))$, on a $x_\varepsilon - x = (x-a)\varepsilon/(2r)$, et donc $\|x_\varepsilon - x\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$ ce qui montre que $x_\varepsilon \in B(x,\varepsilon)$. Enfin, $\|x_e - a\| = r + \varepsilon/2$ ce qui montre que $x_\varepsilon \notin B(a,r)$ et donc que $B(x,\varepsilon) \not\subset B(a,r)$. C'est absurde.

2. Si $E = \mathbb{N}$ est muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$, alors $\overline{B(1,1)} = \{1\}$ et $B'(1,1) = \{0,1,2\}$. De même, $(B'(1,1))^\circ = \{0,1,2\}$ et $B(1,1) = \{1\}$, donc on n'a pas les égalités précédentes dans un espace métrique en général.

Exercice 1.36.

1. Montrons que $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. Tout d'abord $A^\circ \cap B^\circ$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$, donc $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

Montrons maintenant que $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$. Soit $x \in (A \cap B)^\circ$. Alors, d'après l'exercice 1.13, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A \cap B$, ce qui implique que $B(x,\varepsilon) \subset A$

et $B(x,\varepsilon) \subset B$, et donc que $x \in A^\circ$ et $x \in B^\circ$, soit encore que $x \in A^\circ \cap B^\circ$. On a bien prouvé que $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.

$\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

On a $E \setminus (A \cup B)^\circ = \overline{E \setminus (A \cup B)} = \overline{(E \setminus A) \cap (E \setminus B)} \subset \overline{(E \setminus A)} \cap \overline{(E \setminus B)} = (E \setminus A^\circ) \cap (E \setminus B^\circ) = E \setminus (A^\circ \cup B^\circ)$, et donc $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.

On a $E \setminus \overline{(A \cup B)} = (E \setminus (A \cup B))^\circ = ((E \setminus A) \cap (E \setminus B))^\circ = (E \setminus A)^\circ \cap (E \setminus B)^\circ = (E \setminus \overline{A}) \cap (E \setminus \overline{B}) = E \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$, et donc $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

On a $\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ$. Or $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$, et donc $\partial(A \cup B) \subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A^\circ \cup B^\circ) = (\overline{A} \setminus (A^\circ \cup B^\circ)) \cup (\overline{B} \setminus (A^\circ \cup B^\circ)) \subset (\overline{A} \setminus A^\circ) \cup (\overline{B} \setminus B^\circ) = \partial A \cup \partial B$.

On a $\partial(A \cap B) = \overline{A \cap B} \setminus (A \cap B)^\circ$. Or $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$, et donc $\partial(A \cap B) \subset (\overline{A} \cap \overline{B}) \setminus (A^\circ \cap B^\circ) = (\overline{A} \cap \overline{B} \setminus A^\circ) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \setminus B^\circ) \subset (\overline{A} \setminus A^\circ) \cup (\overline{B} \setminus B^\circ) = \partial A \cup \partial B$.

2. Dans $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle, on prend $A =]0,1[$ et $B =]1,2[$. On a $\overline{A \cap B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

De même, si $A' = \mathbb{R} \setminus A$ et $B' = \mathbb{R} \setminus B$, alors $A'^\circ \cup B'^\circ =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\cup]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $(A' \cup B')^\circ = \mathbb{R}$.

Enfin, $\partial(A' \cup B') = \emptyset$ et $\partial A' \cup \partial B' = \{0, 1, 2\}$.

Et $\partial(A \cap B) = \emptyset$ alors que $\partial A \cup \partial B = \{0, 1, 2\}$.

3. On sait que $A \subset \overline{A}$. Si $\partial A \subset A$, alors $\overline{A} \setminus A^\circ \subset A$, et donc $(\overline{A} \setminus A^\circ) \cup A^\circ = \overline{A} \subset A \cup A^\circ = A$ car $A^\circ \subset A$, ce qui prouve que $A = \overline{A}$ et donc que A est fermé.

Réciproquement, si A est fermé, alors $\overline{A} \subset A$ et donc $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ \subset A \setminus A^\circ \subset A$.

Exercice 1.37. On a $A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, donc $\overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$, puis $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$.

Il n'y a pas égalité en général. Par exemple, si $I =]0,1[$ et si pour $i \in I$, $A_i = \{i\}$, alors $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} =]0,1[$ alors que $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = [0,1]$.

L'autre inclusion est tout à fait similaire.

2. On a $\overline{E \setminus A} = E \setminus A^\circ$. En particulier, si $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, alors $A^\circ = E \setminus \overline{E \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i)} = E \setminus \overline{\bigcap_{i \in I} (E \setminus A_i)} \supset E \setminus (\bigcap_{i \in I} \overline{(E \setminus A_i)}) = \bigcup_{i \in I} (E \setminus (E \setminus A_i^\circ)) = \bigcup_{i \in I} A_i^\circ$.

Et donc $\bigcup_{i \in I} A_i^\circ \subset (\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ$.

De même, on a $(\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \subset \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$.

Exercice 1.38.

1. Montrons que, si $x \in \overline{A}$, alors $d(x, A) = 0$.

Soit $x \in \overline{A}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $x \in \overline{A}$, la boule de centre x et de rayon ε coupe A, ce qui implique qu'il existe $y \in A$ tel que $d(x,y) \leq \varepsilon$, et donc $d(x, A) \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, on en déduit que $d(x, A) = 0$.

Montrons que, si $d(x, A) = 0$, alors $x \in \overline{A}$. Soit donc x tel que $d(x, A) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On en déduit que ε est strictement supérieur à la borne inférieure de l'ensemble des $d(x, y)$ quand y varie dans A, et donc que ε n'est pas minorant de cet ensemble. En particulier, il existe $y \in A$ tel que $d(x, y) < \varepsilon$, ce qui implique que $B(x, \varepsilon) \cap A$ est non vide, ceci quel que soit $\varepsilon > 0$. En particulier, $x \in \overline{A}$.

On a bien prouvé que $x \in \overline{A}$ si et seulement si $d(x, A) = 0$.

2. On a $\overline{A} = \{x,\ d(x, A) = 0\} \subset V_\varepsilon(A)$, ceci quel que soit $\varepsilon > 0$, et donc $\overline{A} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} V_\varepsilon(A)$.

Réciproquement, si $x \in \bigcap_{\varepsilon>0} V_\varepsilon(A)$, alors $d(x, A) = 0$ et donc $x \in \overline{A}$.

On a bien prouvé que $\overline{A} = \bigcap_{\varepsilon>0} V_\varepsilon(A)$.

3. Montrons que $d_A = d_{\overline{A}}$. Tout d'abord, on a $A \subset \overline{A}$. Et donc, si $x \in E$, on a, pour tout $y \in A$,

$$\inf_{y\in\overline{A}} d(x, y) \leq d(x, y)$$

ce qui implique que

$$\inf_{y\in\overline{A}} d(x, y) \leq \inf_{y\in A} d(x, y),$$

soit encore que $d_{\overline{A}} \leq d_A$. Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $d_A \leq d_{\overline{A}} + \varepsilon$. Pour cela, soit $x \in E$. Comme $d_{\overline{A}}(x)$ est la borne inférieure de l'ensemble des $d(x, y)$ quand $y \in \overline{A}$, on en déduit que $d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon/2$ n'est plus minorant de cet ensemble, et donc qu'il existe $y \in \overline{A}$ tel que $d(x, y) < d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon/2$. Comme $y \in \overline{A}$, il existe $z \in A$ tel que $d(y, z) \leq \varepsilon/2$. En particulier, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ce qui implique que $d(x, z) \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$. En particulier, on obtient que $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$.

Il reste à vérifier que, si pour tout $\varepsilon > 0$, $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$, alors $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x)$. Supposons donc le contraire, c'est à dire que $d_A(x) > d_{\overline{A}}(x)$. Posant $\varepsilon = \frac{1}{2}(d_A(x) - d_{\overline{A}}(x))$, l'inégalité $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$ devient $2\varepsilon < \varepsilon$, ce qui est absurde.

En conclusion, on a bien montré que $d_A = d_{\overline{A}}$.

Il est alors clair que $\overline{A} = \overline{B}$ implique $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$.

Réciproquement, si $d_A = d_B$, alors $x \in \overline{A}$ équivaut à $d_A(x) = 0$, ce qui équivaut encore à $d_B(x) = 0$ puis à $x \in \overline{B}$. En conclusion $d_A = d_B$ implique $\overline{A} = \overline{B}$.

Exercice 1.39.

1. Il suffit de montrer que $\sup A$ est élément de $\overline{A}$ et que $\overline{A} \subset]-\infty, \sup A[$. Le raisonnement sera le même pour la borne inférieure.

Montrons donc que $\sup A \in \overline{A}$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. $\sup A - \varepsilon$ n'est plus majorant de A, donc il existe $x \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < x$, ce qui implique que la boule de centre $\sup A$ et de rayon ε coupe A. Ceci étant vrai, quel que soit $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\sup A \in \overline{A}$.

Il reste à vérifier que si $x > \sup A$, alors $x \notin \overline{A}$. Soit donc $x > \sup A$ et soit $\varepsilon = x - \sup A$. Si $x \in \overline{A}$, alors la boule de centre x et de rayon ε contient au moins un élément y de A. Or $\sup A = x - \varepsilon < y$. Ceci est absurde.

On a donc bien montré que $\sup A$ et $\inf A$ sont éléments de $\overline{A}$ et que $\overline{A} \subset [\inf A, \sup A]$.

2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide, ouverte et fermée. Soit $a \in A$. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}\backslash A$ plus grand que a. En particulier, l'ensemble $B = (\mathbb{R}\backslash A) \cap [a, +\infty[$ est non vide minoré dans $\mathbb{R}$, donc admet une borne inférieure i. Comme A est ouvert, on en déduit que $\mathbb{R} \setminus A$ est fermé et donc que B est fermé comme intersection de deux fermés. D'après ce qui précède, $i \in B$.

De plus, on a $i \geq a$. Si $i = a$, alors $a \in B$, ce qui implique que $a \notin A$, ce qui est absurde. Donc $i > a$.

En particulier, tout élément y dans $]a, i[$ n'est pas dans B, donc est dans A. Montrons que ceci implique maintenant que $i \in \overline{A}$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, $]i - \varepsilon, i + \varepsilon[\cap]a, i[$ est non vide donc $]i - \varepsilon, i + \varepsilon[$ coupe A. Ceci étant vrai, quel que soit $\varepsilon > 0$, on en déduit que $i \in \overline{A} = A$. Or i ne peut appartenir à la fois à A et B ; c'est donc contradictoire.

On obtient donc que, pour tout $a \in A$, l'ensemble $(\mathbb{R} \setminus A) \cap [a, +\infty[$ est vide, ce qui implique que $[a, +\infty[\subset A$.

On montre de même que, pour tout $a \in A$, $]-\infty, a] \subset A$. Et ceci montre que $A = \mathbb{R}$.

En conclusion, les seules parties de $\mathbb{R}$ ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 1.40.

1. Soient x et y deux points distincts de E. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x,y)$ et $U = B(x,\varepsilon)$ et $V = B(y,\varepsilon)$. On a bien $x \in U$ et $y \in V$. Enfin si $U \cap V \neq \emptyset$ et si $z \in U \cap V$, alors $d(x,z) < \varepsilon$ et $d(y,z) < \varepsilon$, ce qui implique que $2\varepsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < 2\varepsilon$. Ceci est absurde et donc $U \cap V = \emptyset$.

2. Si $B \subset V$ et si $U \cap V = \emptyset$, alors $U \cap B = \emptyset$. Or si $x \in U$ et si U est ouvert, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$. Ceci implique que $B(x,\varepsilon) \cap B = \emptyset$ et donc que $x \notin \overline{B}$. En conclusion, on ne peut pas trouver deux ouverts U et V tels que $x \in U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

3. Il est clair que $x \in U$ et $B \subset V$. Montrons que $U \cap V = \emptyset$. Supposons le contraire. Soit $z \in U \cap V$. Alors $d(x,z) < \frac{1}{2}\delta$ et il existe $y \in B$ tel que $d(y,z) < \frac{1}{2}\delta$. En particulier, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < \delta$ ce qui implique que $d(x,B) \leq d(x,y) < \delta$. C'est absurde.

4.1. A et B ainsi donnés sont fermés et disjoints. Cependant $d(p, p + \frac{1}{p}) = \frac{1}{p}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Donc $d(A,B) = 0$.

4.2. Il est clair que $A \subset U$ et $B \subset V$. Il reste à vérifier que $U \cap V = \emptyset$. Supposons que $U \cap V \neq \emptyset$ et soit $z \in U \cap V$. Alors il existe $x \in A$ tel que $d(x,z) < \frac{1}{2}d_x$ et il existe $y \in B$ tel que $d(y,z) < \frac{1}{2}\delta_y$. Or $d(x,y) \geq d_x$ et $d(x,y) \geq \delta_y$. Et donc, si $\alpha = \max(d_x, \delta_y)$, on a $\alpha \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < \frac{1}{2}(d_x + \delta_y) \leq \frac{1}{2}(2\alpha)$, ce qui est absurde.

Exercice 1.41. Tout d'abord, si $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ sont dans s,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq 1$$

et donc la série définissant $d(x,y)$ est convergente (car $\sum 2^{-n} < +\infty$) donc d est bien définie.

Si x, y, z sont dans s, on a $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$, et $d(x,y) = d(y,x)$. Pour l'inégalité triangulaire, on utilise le fait que, si δ est une distance, $\frac{\delta}{1+\delta}$ est encore une distance (*cf.* Exercice 1.29.). Et donc, si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} \leq \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \frac{|y_n - z_n|}{1 + |y_n - z_n|}.$$

Si on prend $N \in \mathbb{N}$ et si on somme toutes ces inégalités, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{|y_n - z_n|}{1 + |y_n - z_n|}.$$

Puis, si on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Exercice 1.42. Pour montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_p$ sont des normes il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire. Soient x et y dans ℓ^p et $N \in \mathbb{N}$. L'inégalité de Minkowski nous donne

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{N} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Un passage à la limite quand N tend vers $+\infty$ nous donne

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Si x et y sont dans ℓ^∞ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Et donc

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Il est clair que $c_{00} \subset \ell^1$. De plus, si $x = (x_n) \in \ell^1$, alors $x_n \to_{n \to \infty} 0$ donc $\ell^1 \subset c_0$.

Enfin, si $x = (x_n) \in c_0$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\varepsilon \ \Rightarrow \ |x_n| \leq \varepsilon.$$

En particulier, si on fait $\varepsilon = 1$ on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leq \max(|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n_1}|, 1)$$

ce qui montre que (x_n) est bornée et donc que $x \in \ell^\infty$.

Il reste donc à montrer que, si $p \leq q$, alors $\ell^p \subset \ell^q$. Pour cela, on remarque que si $x = (x_n) \in \ell^p$, alors $x \in c_0$ et donc il existe un rang n_1 à partir duquel on a $|x_n| \leq 1$. En particulier, si $n \geq n_1$, on a $|x_n|^q \leq |x_n|^p$, ce qui montre que $\sum |x_n|^q$ converge et donc que $x \in \ell^q$.

Exercice 1.43. Montrons que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, d(u_n, \ell) \geq \varepsilon\}$ est fini.

Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, d(u_n, \ell) \geq \varepsilon\}$ est fini. Soit $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}, d(u_n, \ell) \geq \varepsilon\}$. Alors, pour tout $n \geq n_0 + 1$, on a $d(u_n, \ell) < e$. Ceci étant vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, on en déduit que (u_n) converge vers ℓ.

Réciproquement, soit (u_n) une suite qui converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $d(u_n, \ell) < \varepsilon$, ce qui implique que

$$\{n \in \mathbb{N}, d(u_n, \ell) \geq \varepsilon\} \subset \{0, \ldots, n_0 - 1\}.$$

On a bien montré que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N}, d(u_n, \ell) \geq \varepsilon\}$ est fini.

Si maintenant, σ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $n \in \{n \in \mathbb{N}, d(u_{\sigma(n)}, \ell) \geq \varepsilon\}$ si et seulement si $\sigma(n) \in \{n \in \mathbb{N}, d(u_n, \ell) \geq \varepsilon\}$. En particulier $\{n \in \mathbb{N}, d(u_{\sigma(n)}, \ell) \geq \varepsilon\} = \sigma^{-1}(\{n \in \mathbb{N}, d(u_n, \ell) \geq \varepsilon\})$. Comme σ est bijective, on en déduit que $\{n \in \mathbb{N}, d(u_{\sigma(n)}, \ell) \geq \varepsilon\}$ est fini et a le même cardinal que $\{n \in \mathbb{N}, d(u_n, \ell) \geq \varepsilon\}$, et donc $(u_{\sigma(n)})$ converge vers ℓ.

Remarque : En fait, il suffit que σ soit injective pour que ce soit vrai.

2. Supposons que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_ε tel que, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on ait $d(u_{2n}, \ell) < \varepsilon$. Il existe un rang n'_ε tel que, pour tout $n \geq n'_\varepsilon$, on ait $d(u_{2n+1}, \ell) < \varepsilon$. Posons $N_\varepsilon = \max(2n_\varepsilon, 2n'_\varepsilon + 1)$. Nous allons montrer que, pour $n \geq N_\varepsilon$, on a $d(u_n, \ell) < \varepsilon$. Soit donc $n \geq N_\varepsilon$. Si n est pair, alors $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}$. Comme $n \geq N_\varepsilon \geq 2n_\varepsilon$, on en déduit que $p \geq n_e$ et donc que $d(u_{2p}, \ell) = d(u_n, \ell) < \varepsilon$. Si n est impair, alors $n = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$. Comme $n \geq N_\varepsilon \geq 2n'_\varepsilon + 1$, on en déduit que $p \geq n'_\varepsilon$ et donc que $d(u_{2p+1}, \ell) = d(u_n, \ell) < \varepsilon$. On a bien montré que $n \geq N_\varepsilon$ implique $d(u_n, \ell) < \varepsilon$. Ceci étant vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, on en déduit que (u_n) converge.

Supposons que (u_{2n}) converge vers ℓ_1, (u_{2n+1}) converge vers ℓ_2 et (u_{3n}) converge vers ℓ_3. D'après la question précédente, il suffit de montrer que $\ell_1 = \ell_2$. Nous allons en fait montrer que l'on a $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$, en utilisant la proposition 5.2.2.

Considérons la suite (u_{6n}). Cette suite est extraite de (u_{2n}), car si on note $\phi(n) = 3n$ et si $v_n = u_{2n}$, alors $u_{6n} = v_{\phi(n)}$. En particulier, la suite (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) donc converge vers ℓ_1 d'après la proposition 5.2.2.

Considérons toujours la suite (u_{6n}). Cette suite est extraite de (u_{3n}), car si on note $\psi(n) = 2n$ et si $w_n = u_{3n}$, alors $u_{6n} = w_{\psi(n)}$. En particulier, la suite (u_{6n}) est extraite de (u_{3n}) donc converge vers ℓ_3 d'après la proposition 5.2.2. On obtient donc $\ell_1 = \ell_3$.

Considérons maintenant la suite (u_{6n+3}). Cette suite est extraite de (u_{2n+1}), car si on note $\phi(n) = 3n + 1$ et si $v_n = u_{2n+1}$, alors $u_{6n} = v_{\phi(n)}$. En particulier, la suite (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) donc converge vers ℓ_2 d'après la proposition 5.2.2.

Considérons toujours la suite (u_{6n+3}). Cette suite est extraite de (u_{3n}), car si on note $\psi(n) = 2n + 1$ et si $w_n = u_{3n}$, alors $u_{6n} = w_{\psi(n)}$. En particulier, la suite (u_{6n+3}) est extraite de (u_{3n}) donc converge vers ℓ_3 d'après la proposition 5.2.2. On obtient donc $\ell_2 = \ell_3$.

On a bien obtenu $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$, ce qui montre que (u_n) converge.

Exercice 1.44.

1. Supposons d'abord que (u_n) est une suite réelle et que $\ell = 1$. On a $\lim(u_{n+1} - u_n) = 1$, donc il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $1/2 \leq u_{n+1} - u_n \leq 3/2$. Montrons par récurrence sur $n \geq n_0$, que

$$u_n \geq u_{n_0} + \frac{n - n_0}{2}.$$

C'est clair si $n = n_0$. Supposons que ce soit vrai pour un rang $n \geq n_0$, et montrons que c'est vrai au rang $n+1$. Soit $n \geq n_0$ tel que

$$u_n \geq u_{n_0} + \frac{n - n_0}{2}.$$

Comme $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{2}$, et donc

$$u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2} \geq u_{n_0} + \frac{n - n_0 + 1}{2}$$

ce qui montre que c'est vrai au rang $n+1$.

En particulier, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Supposons maintenant que (u_n) soit une suite complexe et que ℓ soit un nombre complexe différent de 0.

Posons $(v_n) = (\frac{1}{\ell} u_n)$, on obtient que $\lim(v_{n+1} - v_n) = 1$. Enfin, si w_n est la partie réelle de v_n, alors

$$|w_{n+1} - w_n - 1| = |\mathrm{Re}(v_{n+1} - v_n - 1)| \leq |v_{n+1} - v_n - 1| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, (w_n) est une suite réelle telle que $\lim(w_{n+1} - w_n) = 1$. D'après ce qui précède, la suite (w_n) tend vers $+\infty$. Enfin, comme $|u_n| = |\ell||v_n| \geq |\ell|(\mathrm{Re}\ v_n) = |\ell| w_n$, on en déduit que $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$.

2. Tout d'abord, on peut supposer que $\ell = 0$. En effet, si on pose $(u'_n) = (u_n - \ell)$ et si on pose $(v'_n) = (v_n - \ell)$, alors $v'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u'_k$. Et donc si on montre le résultat pour $\ell = 0$, c'est à dire si on montre que $(u'_n) \to 0$ implique $(v'_n) \to 0$, alors on aura $\lim v_n = \ell$.

Montrons donc que si (u_n) tend vers 0, alors la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \geq 2$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a

$$|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, si $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |v_n| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \right| &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n} u_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n} |u_k| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k| + \frac{n - N + 1}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Or, N étant fixé, la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k|)$ tend vers 0. Donc il existe un rang N' supérieur ou égal à N tel que, pour tout $n \geq N'$, on ait

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, on a bien montré l'existence d'un rang N' tel que, pour tout $n \geq N'$ on ait $|v_n| \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a bien montré que (v_n) tend vers 0.

3. Soit (u_n) qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$|u_n - \ell| < \frac{1}{2}.$$

En particulier, comme $|u_{n_0} - \ell| < \frac{1}{2}$, on en déduit que, pour $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - \ell| + |u_{n_0} - \ell| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

En particulier, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - u_{n_0}|$ est un entier strictement inférieur à 1, donc nul. On a bien obtenu l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$, ce qui montre que (u_n) est stationnaire.

Montrons maintenant que si une suite de rationnels (p_n/q_n) tend vers un irrationnel ℓ, alors $(|q_n|)$ tend vers $+\infty$.

Supposons que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire que $(|q_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$. Alors, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $|q_n| \leq A$.

Montrons alors qu'il existe une suite extraite $(q_{\varphi(n)})$ bornée. Pour cela, on construit par récurrence une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|q_{\varphi(n)}| \leq A$. En effet, on sait qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que $|q_{n_0}| \leq A$. Supposons avoir construit $\varphi(n)$ tel que $|q_{\varphi(n)}| \leq A$. On sait qu'il existe $n' \geq \varphi(n)+1$ tel que $|q_{n'}| \leq A$. On peut donc poser $\varphi(n+1) = n'$. On a alors construit par récurrence sur n une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|q_{\varphi(n)}| \leq A$.

En particulier, comme (p_n/q_n) tend vers ℓ, on en déduit que $(p_{\varphi(n)}/q_{\varphi(n)})$ tend vers ℓ. La suite $(q_\varphi(n))$ est bornée par A en valeur absolue. Comme $(p_{\varphi(n)}/q_{\varphi(n)})$ tend vers ℓ, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\ell - 1 \leq p_{\varphi(n)}/q_{\varphi(n)} \leq \ell + 1$ ce qui implique que $|p_{\varphi(n)}| \leq A(|\ell| + 1)$. En particulier, la suite $(p_{\varphi(n)})$ est bornée. On en déduit que les suites $(p_{\varphi(n)})$ et $(q_{\varphi(n)})$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, et donc que l'ensemble $B = \{p_{\varphi(n)}/q_{\varphi(n)},\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini. Comme $(p_{\varphi(n)}/q_{\varphi(n)})$ tend vers ℓ, on a $\ell \in \overline{B}$. Enfin B est fermé (c'est un ensemble fini, donc c'est une réunion finie de singletons qui sont des ensembles fermés). Donc $\ell \in B$, ce qui implique que ℓ est rationnel. C'est absurde.

On a bien montré que $(|q_n|)$ tend vers $+\infty$.

4. Si $s \notin A$, montrons qu'il existe une suite extraite convergeant vers s. On va construire par récurrence une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $s - \frac{1}{n+1} \leq u_{\varphi(n)} \leq s$. Pour $n = 0$, on sait que $s - 1$ n'est plus majorant de A, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $s - 1 \leq u_n \leq s$. Supposons construit $\varphi(n)$ tel que $s - \frac{1}{n+1} \leq u_{\varphi(n)} \leq s$. Construisons maintenant $\varphi(n+1)$.

Pour cela, on considère $s - \frac{1}{n+2}$. Ce n'est plus un majorant de A. Montrons qu'il existe $n' \geq \varphi(n) + 1$ tel que $s - \frac{1}{n+2} \leq u_{n'} \leq s$. Supposons le contraire, c'est à dire que pour tout $n' \geq \varphi(n) + 1$, on a $u_{n'} < s - \frac{1}{n+2}$. Alors,

$$\sup_{n' \geq \varphi(n)+1} u_{n'} \leq s - \frac{1}{n+2}.$$

En particulier, comme $s = \sup A = \max\{u_0, u_1, \dots, u_{\varphi(n)}, \sup_{n' \geq \varphi(n)+1} u_{n'}\}$, on en déduit que $s = \max\{u_0, u_1, \dots, u_{\varphi(n)}\}$ donc que $s \in A$, ce qui est absurde.

Il existe donc $n' \geq \varphi(n)+1$ tel que $s - \frac{1}{n+2} \leq u_{n'} \leq s$, et on pose donc $\varphi(n+1) = n'$. On a bien montré qu'il existe une suite extraite convergeant vers s.

5. Soit (u_n) une suite de réels convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe une suite extraite monotone convergeant vers ℓ. On considère pour cela les deux ensembles $A = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \ell\}$. On a $A \cup B = \mathbb{N}$, donc l'un des deux ensembles au moins est infini. Supposons A infini et montrons qu'on peut extraire une suite de (u_n) qui sera croissante et convergera vers ℓ (si A était fini, alors B serait infini et on montrerait de la même manière qu'on peut extraire une suite de (u_n) décroissante et convergeant vers ℓ). Pour cela, on écrit que $A = \{n_0 < n_1 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots\}$. Si on pose $v_k = u_{n_k}$, alors la suite (v_n) est extraite de (u_n) et converge vers ℓ. Il reste à montrer qu'on peut extraire une suite de (v_n) qui sera une suite croissante.

Tout d'abord, on peut considérer que, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq n_0$ tel que $v_n < \ell$. En effet, si ce n'était pas le cas, la suite serait stationnaire. On pourrait donc en extraire une suite constante, qui serait bien évidemment croissante au sens large.

En particulier, en raisonnant comme précedemment, on peut extraire une sous-suite de (v_n) dont les termes seront tous strictement inférieurs à ℓ et cette sous-suite que l'on notera (w_n) convergera vers ℓ.

Il reste à montrer qu'on peut extraire une sous-suite de (w_n) qui sera croissante. Pour cela, on remarque que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n > n_0$ tel que $v_{n_0} \leq v_n < \ell$ car $v_{n_0} < \ell$ et v_n converge vers ℓ. Il est alors clair qu'on peut extraire une sous-suite (x_n) de (w_n) qui sera strictement croissante. Cette suite (x_n) sera donc une suite extraite croissante de (u_n) qui converge vers ℓ.

Exercice 1.45. Tout d'abord, on sait que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est séparable : en effet $\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{C}$.

On fixe donc le corps (qui sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ainsi que le sous-ensemble dénombrable A qui sera $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.

On va montrer que l'ensemble B des suites à valeurs dans A et qui sont nulles à partir d'un certain rang est un sous-ensemble dénombrable dense de ℓ^p.

Pour voir que B est dénombrable, on définit l'application $\Phi : \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n \to B$ qui à un élément $(u_1, \dots, u_n)$ associe la suite $(v_k)_k$ définie par $v_k = u_{k+1}$ pour $k \leq n-1$ et $v_k = 0$ sinon. Cette application est une bijection. Comme A est dénombrable, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A^n est dénombrable, et donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n$ est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, ce qui montre que B est dénombrable.

Montrons maintenant que B est dense dans ℓ^p. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x = (x_n)_n \in \ell^p$. Montrons qu'il existe $y = (y_n)_n \in B$ tel que $\|x - y\|_p \leq \varepsilon$.

Pour cela, on utilise le fait que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^p$ converge. Il existe donc un rang n_0 à partir duquel on a

$$\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |x_k|^p \leq \frac{1}{2}\varepsilon^p.$$

Comme A est dense dans $\mathbb{K}$, alors pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n_0\}$, il existe un y_k dans A tel que

$$|x_k - y_k|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2(n_0+1)}.$$

Si on pose, pour $n \geq n_0$, $y_n = 0$, la suite $(y_n)_n$ est dans B et de plus,

$$\|x-y\|_p^p = \sum_{k=0}^{n_0} |x_k - y_k|^p + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |x_k| \leq \sum_{k=0}^{n_0} \frac{\varepsilon^p}{2(n_0+1)} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$

et donc $\|x-y\|_p \leq \varepsilon$. On a donc bien prouvé que ℓ^p était séparable.

Exercice 1.46. Tout d'abord, si $x = (x_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et si $y = (y_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est différent de x, alors $\|x-y\|_\infty = 1$, ce qui montre que $B(x, \frac{1}{2}) \cap B(y, \frac{1}{2}) = \emptyset$. Supposons qu'il existe un ensemble A qui soit dénombrable et dense dans ℓ^∞. Si $x = (x_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, alors il existe au moins un élément a de A dans la boule de centre x et de rayon $1/2$. On en choisit 1 que l'on appelle a_x, et on note $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to A$ qui à $x = (x_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ associe a_x. Cette application est injective. En effet, si $x = (x_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et si $y = (y_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ différent de x sont tels que $a_x = a_y$, alors $a_x = a_y$ est dans la boule de centre x et de rayon $1/2$, et dans la boule de centre y et de rayon $1/2$, ce qui contredit le fait que $B(x, \frac{1}{2}) \cap B(y, \frac{1}{2}) = \emptyset$.

En particulier ϕ est une injection dans un ensemble dénombrable. On obtient donc que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est dénombrable (*cf.* Exercice 0.24), et ceci est absurde.

Exercice 1.47. Tout d'abord, on sait grâce à l'exercice 1.33, que d_2 et d_∞ définissent les mêmes ouverts. Comme les fermés sont les complémentaires des ouverts, on en déduit que d_2 et d_∞ définissent les mêmes fermés dans $\mathbb{R}^2$.

Supposons A et B fermés dans $\mathbb{R}$. Nous allons montrer que $A \times B$ est fermé pour d_∞, donc pour d_2.

Pour cela, il suffit de montrer que si (a_n, b_n) est une suite de $A \times B$ convergente pour d_∞ vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(x, y) \in A \times B$.

On remarque que l'on a $|a_n - x| \leq d_\infty((a_n, b_n), (x, y))$ et donc $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Comme A est fermé, on en déduit que $x \in A$.

De même, on obtient que $y \in B$ et donc $(x, y) \in A \times B$, ce qui montre que $A \times B$ est fermé.

Réciproquement, supposons $A \times B$ fermé et montrons que A et B sont fermés. Pour cela, on considère une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $x \in \mathbb{R}$, et une suite (b_n) d'éléments de B qui converge vers $y \in \mathbb{R}$. Pour montrer que A et B sont fermés, il faut montrer que $x \in A$ et que $y \in B$.

Or $d_\infty((a_n, b_n), (x, y)) = \max(|a_n - x|, |b_n - y|) \leq |a_n - x| + |b_n - y|$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc (a_n, b_n) est une suite d'éléments de $A \times B$ qui converge vers (x, y) pour la distance d_∞ ou d_2. Comme $A \times B$ est fermé, on a $(x, y) \in A \times B$, ce qui montre que $x \in A$ et que $y \in B$, et prouve par là que A et B sont fermés.