Corrigé des Exercices d'approfondissement du chapitre 3.

Exercice 3.8. On vérifie facilement que d est une distance. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Il existe un rang n_0 tel que, quels que soient p et q supérieurs ou égaux à n_0, on ait $d(u_p, u_q) < a$, ce qui entraîne que $d(u_p, u_q) = 0$, soit encore que $u_p = u_q$. La suite (u_n) est donc stationnaire, et donc convergente.

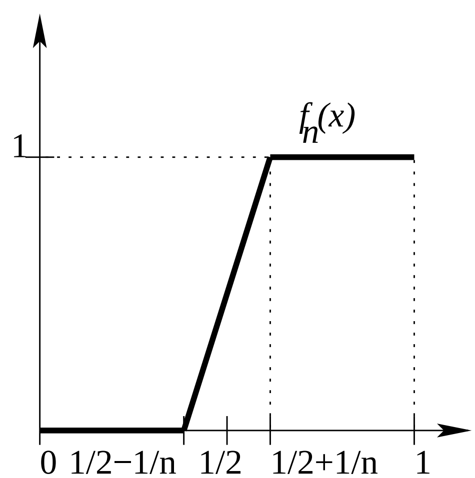
Exercice 3.9.

1. Des parties complètes sont fermées, et toute intersection de fermés est fermée. Comme une partie fermée d'un espace métrique complet est complète, on en déduit qu'une intersection de parties complètes est une partie complète.
2. Pour les réunions finies, la preuve est la même. Pour une réunion quelconque, c'est faux. Par exemple $\mathbb{Q}$ est réunion dénombrable de singletons qui sont donc des parties complètes de $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

Exercice 3.10.

On définit la suite (f_n) pour $n \geq 3$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} f_n = 0 & \text{sur} \quad \left[0, \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\right], \\ f_n = \dfrac{n}{2}\left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right) & \text{sur} \quad \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right], \\ f_n = 1 & \text{sur} \quad \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$



Si $m \geq n$, alors f_n et f_m coïncident sur $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$. De plus, f_n et f_m prennent des valeurs entre 0 et 1.

Et donc,

$$\int_0^1 |f_m - f_n| = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n - f_m| \leq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (f_n + f_m) \leq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} 2 = \frac{4}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite (f_n) est donc de Cauchy dans L^1. Supposons que (f_n) converge vers $f \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Nous allons montrer que $f = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}[$ et que $f = 1$ sur $]\frac{1}{2}, 1]$.

Tout d'abord, on remarque que si une fonction f est positive et continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ sur $[a, b]$. En effet, si f est continue, la fonction $F : [a, b] \ni x \mapsto \int_a^x f$ est dérivable, de dérivée $f \geq 0$ donc F est croissante. Comme $F(a) = F(b) = 0$, on en déduit que F vaut 0 sur $[a, b]$ et donc que $f = F' = 0$ sur $[a, b]$.

Montrons maintenant que $f = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}[$. Soit $\varepsilon > 0$ strictement inférieur à $\frac{1}{2}$. Il existe un rang n_ε à partir duquel l'intervalle $[0, \frac{1}{2} - \varepsilon] \subset [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, ceci quel que soit $n \geq n_\varepsilon$. On a alors, pour tout $n \geq n_\varepsilon$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} |f_n - f| = \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} |f| \leq \int_0^1 |f_n - f|.$$

Le membre de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$ car la suite (f_n) converge vers f dans L^1. Et donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} |f| = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Cela montre que f vaut 0 sur $[0, \frac{1}{2}[$. On montre de même que f vaut 1 sur $]\frac{1}{2}, 1]$. Comme $f \in E$, f est continue, et donc $\lim_{\frac{1}{2}-} f = 0 = \lim_{\frac{1}{2}+} f = 1$. C'est absurde.

Exercice 3.11. Montrons que c_0 est fermé. Soit (x_n) une suite d'éléments de c_0 qui converge vers $x \in \ell^\infty$. Nous allons montrer que $x \in c_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N_ε tel que,

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \qquad \|x - x_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

En particulier, $\|x - x_{N_\varepsilon}\|_\infty \leq \varepsilon$. Comme x_{N_ε} est dans c_0, si $x_{N_\varepsilon} = (x_{N_\varepsilon,p})_p$, alors il existe un rang p_ε tel que,

$$\forall p \geq p_\varepsilon, \qquad |x_{N_\varepsilon,p}| \leq \varepsilon.$$

Et donc,

$$\forall p \geq p_\varepsilon, \qquad |x_p| \leq |x_{N_\varepsilon,p}| + |x_{N_\varepsilon,p} - x_p| \leq \varepsilon + \|x - x_{N_\varepsilon}\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

Ceci montre bien que $x \in c_0$, et donc que c_0 est fermé.

Montrons maintenant que c est fermé. Soit (x_n) une suite d'éléments de c qui converge vers $x \in \ell^\infty$. On va montrer que $x \in c$. Tout d'abord, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, ℓ_n désigne la limite $\lim_{p\to+\infty}(x_{n,p})$ de la suite x_n, alors la suite (ℓ_n) est de Cauchy. En effet, la suite (x_n) est de Cauchy dans ℓ^∞, et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad \forall m, n \geq N_\varepsilon, \qquad \|x_m - x_n\|_\infty \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad \forall m, n \geq N_\varepsilon, \qquad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad |x_{m,p} - x_{n,p}| \leq \varepsilon,$$

et donc, en faisant tendre p vers $+\infty$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad \forall m, n \geq N_\varepsilon, \qquad |\ell_m - \ell_n| \leq \varepsilon.$$

Comme $\mathbb{K}$ est complet, la suite $(\ell_n)_n$ est donc convergente. Soit ℓ sa limite. Montrons que la suite x converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (ℓ_n) converge vers ℓ et que la suite (x_n) converge vers x dans ℓ_∞, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\ell - \ell_n| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \|x - x_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

La suite x_n converge vers ℓ_n, et donc il existe un rang p_ε tel que

$$\forall p \geq p_\varepsilon, \qquad |x_{n,p} - \ell_n| \leq \varepsilon.$$

En particulier, comme

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad |x_{n,p} - x_p| \leq \|x - x_n\|_\infty \leq \varepsilon,$$

on a

$$\forall p \geq p_\varepsilon, \qquad |x_p - \ell| \leq |x_p - x_{n,p}| + |x_{n,p} - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Ceci montre bien que x converge vers ℓ et donc que $x \in c$.

Montrons maintenant que ℓ^∞ est complet. Soit donc (x_n) une suite de Cauchy dans ℓ^∞. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{n,p})_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$ car

$$|x_{n,p} - x_{m,p}| \leq \|x_n - x_m\|_\infty.$$

Comme $\mathbb{K}$ est complet, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{n,p})_n$ est une suite convergente. Notons x_p sa limite, et soit $x = (x_p)$. On est donc ramené au problème habituel suivant : montrer que $x \in \ell^\infty$ et montrer que (x_n) converge vers x dans ℓ^∞.

Montrons donc que $x \in \ell^\infty$. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall m, n \geq N, \qquad \|x_n - x_m\|_\infty \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall m, n \geq N, \qquad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad |x_{n,p} - x_{m,p}| \leq \varepsilon.$$

Fixons ε, N, n et p et faisons tendre m vers $+\infty$. On obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad |x_{n,p} - x_p| \leq \varepsilon. \tag{$*$}$$

En particulier, si on fixe ε, N et n, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad |x_{n,p} - x_p| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x_p| \leq |x_{n,p}| + \varepsilon \leq \|x_n\|_\infty + \varepsilon,$$

ce qui montre que $x \in \ell^\infty$. Enfin, la proposition $(*)$ se réécrit

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad \|x_n - x\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que (x_n) converge bien vers x pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On en déduit que ℓ^∞ est complet. Comme c_0 et c sont fermés dans ℓ^∞ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, on en déduit que les espaces c et c_0 munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sont complets.

Exercice 3.12.

1. Tout d'abord $d(f,g)$ est bien définie car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{\|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty}{1 + \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty} \leq 1$$

et $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n}$ est finie. Si $d(f,g) = 0$, alors en particulier, $\|f - g\|_\infty = 0$ et $f = g$. Il est clair que $d(f,g) = d(g,f)$. La fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est continue, dérivable de dérivée $\varphi'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ strictement positive, donc φ est strictement croissante. De plus, φ est sous-additive car

$$\varphi(x+y) = \frac{x+y}{1+x+y} = \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Enfin, si f, g, h sont trois fonctions de classe C^∞, alors

$$\frac{\|f-h\|_\infty}{1+\|f-h\|_\infty} = \varphi(\|f-h\|_\infty) \leq \varphi(\|f-g\|_\infty + \|g-h\|_\infty)$$
$$\leq \varphi(\|f-g\|_\infty) + \varphi(\|g-h\|_\infty) = \frac{\|f-g\|_\infty}{1+\|f-g\|_\infty} + \frac{\|g-h\|_\infty}{1+\|g-h\|_\infty}.$$

Multipliant ces inégalités par $\frac{1}{2^n}$ et en les sommant, on obtient

$$d(g,h) \leq d(f,g) + d(g,h),$$

et donc d est bien une distance.

2. Soit (f_k) une suite de Cauchy pour d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{2^n} \frac{\|f_k^{(n)} - f_\ell^{(n)}\|_\infty}{1+\|f_k^{(n)} - f_\ell^{(n)}\|_\infty} \leq d(f_k, f_\ell),$$

et donc

$$\|f_k^{(n)} - f_\ell^{(n)}\|_\infty \leq \frac{2^n d(f_k, f_\ell)}{1 - 2^n d(f_k, f_\ell)} \qquad \text{si } 2^n d(f_k, f_\ell) < 1,$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(f_k^{(n)})_k$ est de Cauchy. Comme $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, on en déduit que la suite $(f_k^{(n)})_k$ converge pour tout n uniformément vers une fonction g_n.

Nous allons montrer par récurrence sur N la proposition suivante : “ Si (f_k) est une suite de fonctions de classe C^N telle que, pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, la suite $(f_k^{(n)})_k$ converge uniformément vers une fonction g_n, alors la fonction g_0 limite de la suite (f_k) est de classe C^N et, pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, on a $g_0^{(n)} = g_n$.”

Grâce au théorème indiqué, la proposition est vraie au rang $N = 1$. Supposons la proposition vraie au rang N, et montrons la au rang $N+1$. Soit donc (f_k) est une suite de fonctions de classe C^{N+1} telle que, pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N+1\}$, la suite $(f_k^{(n)})_k$ converge uniformément vers une fonction g_n. En particulier, si on applique l'hypothèse de récurrence vraie au rang N à la suite de fonctions $(f_k')_k$, la fonction g_1 est de classe C^N et pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, $g_1^{(n)} = g_{n+1}$. La proposition au rang $N = 1$ appliquée à (f_k) nous donne que g_0 est de classe C^1 et que $g_0' = g_1$. Et donc, on en déduit que g_0 est de classe C^{N+1} car g_1 est de classe C^N et, pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N+1\}$, $g_0^{(n)} = g_n$. On a donc bien prouvé par récurrence sur N la proposition énoncée.

On a donc prouvé en particulier que la suite $(f_k)_k$ converge vers une fonction f de classe C^∞ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $(f_k^{(n)})_k$ converge vers la fonction $f^{(n)}$ uniformément. Il reste à vérifier que

$$\lim_{k\to+\infty} d(f_k, f) = 0$$

pour conclure. Soit $\varepsilon > 0$. Tout d'abord, il existe un rang N tel que

$$\sum_{n \geq N+1} \frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, comme les fonctions $(f_k^{(n)})_k$ convergent uniformément vers $f^{(n)}$ pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, on en déduit que

$$\forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}, \qquad \exists k_n, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad k \geq k_n \quad \Rightarrow \|f_k^{(n)} - f^{(n)}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

En particulier, si $K = \max(k_0, k_1, \ldots, k_N)$, on a

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \qquad k \geq K \quad \Rightarrow \quad d(f_k, f) &\leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \|f_k^{(n)} - f^{(n)}\|_\infty + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

On a donc le résultat.

Exercice 3.13. Une idée par exemple est de prendre une fonction $f(x) = x + \varphi(x)$ avec φ une fonction qui ne s'annule pas. Si on veut $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, il suffit que $-1 < f' < 1$, soit encore que $-2 < \varphi' < 0$. Prenons par exemple $\varphi' = -\frac{1}{1+x^2}$ avec $A = \mathbb{R}$. Enfin, si $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan x$, alors φ ne s'annule pas. En conclusion, la fonction

$$f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

est définie sur $A = \mathbb{R}$ qui est complet. Pour tout $x \in A$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ est strictement inférieur à 1 en module, et donc

$$\forall x, y \in A, \qquad \exists c \in [x, y], \qquad |f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|.$$

Enfin, f n'a pas de point fixe dans A car $f(x) = x$ si et seulement si $\arctan x - \frac{\pi}{2} = 0$ ce qui est impossible.

Exercice 3.14.

a. Tout d'abord f^p est une contraction donc admet un point fixe unique x. Montrons que $f(x) = x$. En effet, $f^{p+1}(x) = f^p(f(x))$ et $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(x)$ car $f^p(x) = x$. On en déduit que $f^p(f(x)) = f(x)$, ce qui montre que $f(x)$ est aussi point fixe de f^p. Comme le point fixe de f^p est unique, on en déduit que $f(x) = x$ donc f admet un point fixe x. Si maintenant f admet un autre point fixe y, alors $f(y) = y$ et donc $f^p(y) = y$ ce qui montre que y est point fixe de f^p et donc que $x = y$. f admet donc un unique point fixe.

b. Si $n \in \mathbb{N}$, on fait la division euclidienne de n par p que l'on écrit $n = pq_n + r_n$ avec $0 \leq r_n \leq p - 1$. Si x_0 est donné et si $x_n = f(x_{n-1})$, alors $x_n = f^{pq_n}(x_{r_n})$. En particulier, si n tend vers $+\infty$, q_n tend vers $+\infty$ car $n - pq_n \leq p - 1$ implique $pq_n \geq n - p + 1$. Comme $x_{r_n} \in \{x_0, x_1, \ldots x_{p-1}\}$ et que pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, la suite $(f^p)^{q_n}(x_k)$ converge vers x quand q_n tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite $f^n(x)$ converge vers x.

Exercice 3.15. Il suffit de montrer que la fonction F est une contraction sur l'espace de Banach E. Pour cela, on remarque que

$$F(g_1)(x) - F(g_2)(x) = \int_{x_0}^{x} \left(f(t, g_1(t)) - f(t, g_2(t))\right) dt,$$

et donc

$$\begin{aligned}|F(g_1)(x) - F(g_2)(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, g_1(t)) - f(t, g_2(t))|\, dt \leq \int_{x_0}^{x} M|g_1(t) - g_2(t)|dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x} M\|g_1 - g_2\|_\infty dt = \frac{1}{4}\|g_1 - g_2\|_\infty,\end{aligned}$$

et donc

$$\|F(g_1) - F(g_2)\|_\infty \leq \frac{1}{4}\|g_1 - g_2\|_\infty.$$

Exercice 3.16. Posons

$$F : C[a, b] \ni f \mapsto \lambda \int_a^b K(s, t) f(t) dt + g(s).$$

Résoudre l'équation proposée revient à trouver un point fixe de F. Comme $C[a, b]$ est complet, il suffit donc de montrer que F est une contraction.

Or, si $f_1, f_2 \in C[a, b]$, on a

$$F(f_1) - F(f_2) = \lambda \int_a^b K(s, t)(f_1(t) - f_2(t))$$

donc

$$\|F(f_1) - F(f_2)\|_\infty \leq \|f_1 - f_2\|_\infty |\lambda| \int_a^b |K(s, t)| dt.$$

En particulier, si on pose $M = \sup_{[a,b]\times[a,b]} |K|$ et si on choisit λ tel que $\lambda(b-a)M < 1$, alors F est une contraction.

Exercice 3.17.

1. Pour montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E, il suffit de montrer que pour tout ouvert O,

$$O \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \right) \neq \emptyset.$$

Comme O_0 est dense dans E, on en déduit que $O_0 \cap O$ est un ouvert non vide. Soit donc $a_0 \in O_0 \cap O$ et r_0 tel que $B(a_0, r_0) \subset O_0 \cap O$. Quitte à prendre un r_0 un peu plus petit, on peut supposer que $r_0 \leq 1$ et que

$$\overline{B(a_0, r_0)} \subset O_0 \cap O. \qquad (*)$$

On continue le procédé. La boule $B(a_0, r_0)$ coupe O_1 car O_1 est dense. Et donc, il existe $a_1 \in B(a_0, r_0) \cap O_1$ et $r_1 > 0$ tel que $B(a_1, r_1) \subset B(a_0, r_0) \cap O_1$. Quitte à prendre un r_1 un peu plus petit, on peut supposer que $r_1 \leq \frac{1}{2}$ et que

$$\overline{B(a_1, r_1)} \subset B(a_0, r_0) \cap O_1. \qquad (**)$$

On construit comme cela une suite de boules $B(a_n, r_n)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq \frac{1}{n}$ et

$$\overline{B(a_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(a_n, r_n) \cap O_{n+1}. \qquad (***)$$

La suite de fermés $(\overline{B(a_n, r_n)})_n$ est une suite de fermés emboîtés dont le diamètre $2r_n$ tend vers 0. D'après le théorème des fermés emboîtés, l'intersection de ces boules est un singleton $\{x\}$. Cet élément x est dans toutes les boules, donc dans tous les ouverts O_n d'après $(**)$ et $(***)$. Cet élément x est aussi dans O d'après $(*)$, et donc

$$O \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \right) \neq \emptyset.$$

2. Si un fermé F est d'intérieur vide, alors son complémentaire O est un ouvert dense car

$$\overline{O} = \overline{E \setminus F} = E \setminus \mathring{F} = E \setminus \emptyset = E.$$

En particulier, la suite d'ouverts $O_n = E \setminus F_n$ est une suite d'ouverts denses dans E. D'après la première question, l'intersection des O_n est dense dans E. Comme $\bigcap O_n = E \setminus \bigcup F_n$, on en déduit que $E \setminus \bigcup F_n$ est dense dans E, et donc que

$$\overline{E \setminus \bigcup F_n} = E.$$

Mais comme

$$\overline{E \setminus \bigcup F_n} = E \setminus \left(\bigcup F_n \right)^{\circ},$$

alors $(\bigcup F_n)^{\circ} = \emptyset$.

3. Si F_n =Vect$\{e_0, \ldots, e_n\}$, alors $\bigcup F_n = E$. En effet, si $x \in E$ alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ et $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_{k_i}.$$

En particulier, si $N = \max\{k_1, \ldots, k_p\}$, alors $x \in F_N$. Comme E est d'intérieur non vide, il découle de la question précédente qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} soit d'intérieur non vide. En particulier, il existe $x_0 \in E$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon_0) \subset F_{n_0}$. Comme F_{n_0} est un sous-espace vectoriel, on en déduit que $B(0, \varepsilon_0) \subset F_{n_0}$, puis que $B(0, 1) \subset F_{n_0}$ et enfin que $E \subset F_{n_0}$. Si E est de dimension infinie, c'est absurde.

4. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie et admet pour base la famille $(X^n)_n$ qui est dénombrable. Donc d'après la question précédente, $\mathbb{K}[X]$ ne peut pas être un espace de Banach.