Corrigé des Exercices d'approfondissement du chapitre 4.

Exercice 4.22. Si $p \neq q$ alors $\|x_p - x_q\| = \max(1 + \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{q}) \geq 1$. En particulier, on ne peut pas extraire de sous-suite convergente de la suite (x_n). Cependant F est bornée car pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\|x_p\| \leq 2$. Et F est fermée. En effet, tous les points de F sont isolés car leur distance est supérieure ou égale à 1. Enfin, F ne peut avoir de point d'accumulation : en effet si x est un tel point d'accumulation, alors tout voisinage de x contient une infinité de points de F. En particulier, si $\varepsilon = 1/2$, il existe au moins deux x_p et x_q dans la boule de centre x et de rayon ε et donc $\|x_p - x_q\| \leq 2\varepsilon < 1$ ce qui est absurde. Comme $\overline{F}$ est la réunion de l'ensemble des points isolés F et de l'ensemble des points d'accumulation qui est vide (propriété 3.5.2 du chapitre 1), on en déduit que $\overline{F} = F$ et donc que F est fermée.

Exercice 4.23. Tout d'abord, si a et b sont deux points fixes distincts de f alors $d(a,b) = d(f(a), f(b)) < d(a,b)$ ce qui est absurde, donc si f admet un point fixe, celui-ci est unique.

Montrons l'existence du point fixe. Soit $g(x) = d(x, f(x))$. g est continue sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. En particulier, g atteint son minimum, c'est à dire qu'il existe $a \in E$ tel que $g(a) = \inf_{x \in E} g(x)$. Si $f(a) \neq a$, alors $d(f(f(a)), f(a)) < d(f(a), a)$, ce qui implique que $g(f(a)) < g(a)$. Ceci contredit le fait que $g(a) = \inf_{x \in E} g(x)$, et donc $f(a) = a$ ce qui montre que f admet un et un seul point fixe.

Soit x_0 in E et (x_n) la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrons que (x_n) converge vers le point fixe a de f. Tout d'abord, la suite $(d(x_n, a))_n$ est décroissante. En effet, $d(x_{n+1}, a) = d(f(x_n), a) \leq d(x_n, a)$. Cette suite est minorée par 0 donc elle converge vers $\alpha \geq 0$. Supposons que (x_n) ne converge pas vers a. Comme E est compact, on en déduit que (x_n) possède une valeur d'adhérence b différente de a (proposition 2.3.3) et donc, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers $b \neq a$. On a donc $d(a,b) = \alpha$ car $d(a, x_{\varphi(n)})$ est une sous-suite de $d(x_n, a)$ qui converge vers α. Mais $d(a, f(b)) = d(f(a), f(b)) < d(a,b) = \alpha$. Comme $d(a, f(b)) = \lim_{n \to +\infty} d(a, x_{\varphi(n)+1}) = \alpha$ car $(d(a, x_{\varphi(n)+1}))_n$ est une sous-suite de $(d(a, x_n))$, on en déduit que $\alpha < \alpha$. C'est absurde, et donc $b = a$ ce qui montre que (x_n) converge vers a.

Exercice 4.24. Il suffit de montrer que C est fermé. Pour cela, pour $x \in E$, on pose g_x l'application qui à $y \in E$ associe $d(y,x) - d(y, f(x))$. L'application g_x est continue, et donc $g_x^{-1}(\{0\})$ est fermé car c'est l'image réciproque par g_x d'un fermé. Comme

$$C = \bigcap_{x \in E} g_x^{-1}(\{0\}),$$

on en déduit que C est une intersection de fermés, donc que C est fermée.

Exercice 4.25.

1. Comme f est une isométrie, si $f(x) = f(y)$, alors $d(f(x), f(y)) = 0 = d(x,y)$, ce qui implique que f est injective. Il reste donc à vérifier que f est surjective.
2. **a.** C'est clair, car $d(x_{m-n}, x) = d(x_{m-n+1}, x_1) = d(x_{m-n+2}, x_2) = \cdots = d(x_{m-1}, x_{n-1}) = d(x_m, x_n)$.

b. Comme A est compacte, il existe une sous-suite convergente $x_{\varphi(n)}$ de (x_n). En particulier, la suite $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n-1)})$ tend vers 0. Comme d'après la question précédente, $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n-1)}) = d(x_{\varphi(n)-\varphi(n-1)}, x)$, on en déduit que la suite y_n tend vers x. Comme φ est strictement croissante, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) - \varphi(n-1) \geq 1$, et donc que $y_n = f(x_{\varphi(n)-\varphi(n-1)-1})$ est une suite de $f(A)$. Et donc $x \in \overline{f(A)}$. Comme f est continue et que A est compacte, on en déduit que $f(A)$ est compacte et donc fermée, ce qui montre que f est surjective.

Si A n'est plus compacte, alors le résultat précédent tombe en défaut. Par exemple, si $A = \ell^2$ et si f est l'application qui à une suite $(u_n)_n$ associe la suite $(v_n)_n$ définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. f est bien une isométrie mais n'est pas surjective.

Exercice 4.26.

1. On procède comme dans l'exercice précédent. Pour tous $m \geq n$, on a

$$d(x_{m-n}, x) \leq d(x_m, x_n).$$

La même démarche que dans l'exercice précédent nous montre que $f(E)$ est dense dans E et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p \geq 1$ tel que $d(x_p, x) < \varepsilon$.

2. Comme $E \times E$ est compact, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ converge. En particulier, les suites $d(x_{\varphi(n)-\varphi(n-1)}, x)$ et $d(y_{\varphi(n)-\varphi(n-1)}, y)$ convergent vers 0, et donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{\varphi(n)-\varphi(n-1)}, x) < \varepsilon$ et $d(y_{\varphi(n)-\varphi(n-1)}, y) < \varepsilon$. Posant $p = \varphi(n) - \varphi(n-1)$, on a $p \geq 1$ et on a bien $d(x_p, x) < \varepsilon$ et $d(y_p, y) < \varepsilon$.

En particulier, si $x, y \in E$, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x_p, y_p) \leq d(x_p, x) + d(x, y) + d(y, y_p) \leq d(x, y) + 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$, on en déduit que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$, et donc que f est une isométrie. En particulier, d'après l'exercice précédent, f est un homéomorphisme isométrique.

Exercice 4.27.

1. Si J est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ inclus dans I, alors J est compact. Comme (f_n) converge uniformément sur J vers f, on en déduit que f est continue sur J (théorème 2.4 du chapitre 2). En particulier, f est continue sur tous les intervalles fermés bornés de I, donc f est continue sur I. En effet, si $x \in I$, alors $x \in \operatorname{int} I$ ou alors x est une extrémité du segment I. Dans le premier cas, il existe $\alpha > 0$ tel que $J = [x - \alpha, x + \alpha] \subset I$. f est continue sur J donc continue en x. Sinon, dans le second cas, on a soit $I = [x, \alpha|$ ou bien $I = |\alpha, x]$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ et $|$ qui vaut soit $]$, soit $[$. Plaçons nous dans le cas $I = [x, \alpha|$. Prenant $J = [x, \beta]$ avec $x < \beta < \alpha$, on en déduit que f est continue sur J, donc en x. Dans tous les cas, on a bien montré que f est continue en tout point x de I, donc que f est continue sur I.

2. L'ensemble $K = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact d'après la proposition 2.3.8. La suite (f_n) converge donc uniformément sur K vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc p_0 in $\mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq p_0$, on ait

$$d(f_p(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad d(f_p(x_n), f(x_n)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme la fonction f est continue, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si on prend $n \geq \max(n_0, p_0)$, on obtient donc que

$$d(f_n(x_n), f(x)) \leq d(f_n(x_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

Exedrcice 4.28.

1. Comme $f_n(x) = \frac{1}{n} f(a) + (1 - \frac{1}{n}) f(x)$, on en déduit que $f_n(x)$ est dans le segment $[f(a), f(x)]$, donc dans C. f_n envoie donc bien C dans C. On a

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = (1 - \frac{1}{n})\|f(x) - f(y)\| \leq (1 - \frac{1}{n})\|x - y\|,$$

ce qui montre que f_n est contractante. En particulier, comme C est compact, C est complet donc f_n admet un unique point fixe x_n.

2. Comme C est compact, il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers $x \in C$. On a alors

$$\begin{aligned} \|x - f(x)\| \leq \|x - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})\| + \|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x)\| \\ + \|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\| \leq \|x - x_{\varphi(n)}\| + 0 + \|x - x_{\varphi(n)}\| + \|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\|. \end{aligned}$$

Or
$$\|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\| \leq \frac{1}{\varphi(n)}\|f(a) - f(x)\| \leq \frac{2M}{\varphi(n)}$$

où $M = \max_{y \in C} \|y\|$. Et donc, quand n tend vers $+\infty$, le membre de droite tend vers 0, ce qui montre que $f(x) = x$ et donc que f admet un point fixe. Celui-ci n'est pas forcément unique. Par exemple, si $C = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ et si $f(x) = x$, alors tous les points de $[0, 1]$ sont points fixes de f.