Corrigé des Exercices d'approfondissement du chapitre 6.

Exercice 6.11. (f_n) converge simplement vers $f = 0$ sur $[0, 1[$ et $f(1) = 1$. Comme la fonction limite f n'est pas continue, il n'y a pas convergence uniforme sur $[0, 1]$. Par contre sur $[0, a]$ avec $a < 1$, on a $\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = a^n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ donc il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[0, a]$ avec $a < 1$.

La suite (g_n) converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$. Calculons $\sup_{x\in[0,1]} g_n(x)$: g_n est continûment dérivable sur $[0, 1]$ et $g_n'(x) = -x^n + n(1-x)x^{n-1} = x^{n-1}(n-(n+1)x)$. On en déduit que g_n croît sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ et décroît sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$, donc

$$\sup_{x\in[0,1]} |g_n(x)| = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où la convergence uniforme de (g_n) vers 0 sur $[0, 1]$. On en déduit la convergence uniforme de (g_n) vers 0 sur tout intervalle de la forme $[0, a]$ avec $a < 1$.

Si $x = 1$ ou $x = 0$, $h_n(x) = 0$. Si $0 < x < 1$ alors $h_n(x) = (1-x)nx^n$ tend vers 0 car nx^n tend vers 0. En effet, $nx^n = \exp(\ln n + n \ln x) = \exp(n(\ln x + \frac{\ln n}{n}))$. Comme $(\frac{\ln n}{n})$ tend vers 0 et que $\ln x < 0$ car $x \in]0, 1[$, on en déduit qu'il existe un rang n_x à partir duquel on ait $\frac{\ln n}{n} \leq -\frac{1}{2}\ln x$, et donc pour tout $n \geq n_x$, on a

$$nx^n = \exp(n(\ln x + \frac{\ln n}{n})) \leq \exp(n(\ln x - \frac{1}{2}\ln x)) = \exp(\frac{n}{2}\ln x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car $\ln x < 0$. On en déduit que (h_n) tend simplement vers 0.

Le calcul fait à la question précédent nous donne

$$\sup_{x\in[0,1]} |h_n(x)| = \frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Or $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \exp((n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1}))$ et $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$, et donc

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \exp\left((n+1)\left(-\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)\right) = \exp(-1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$$

En particulier, $\sup_{x\in[0,1]} |h_n(x)|$ ne tend pas vers 0, donc (h_n) ne converge pas uniformément vers 0.

Par contre, sur $[0, a]$, $\sup_{x\in[0,a]} h_n(x) \leq na^n$ qui tend vers 0, et donc il y a convergence uniforme de (h_n) vers 0.

On a $k_n(x) = \frac{1}{2}\sin(\pi x^n)$ donc $k_n(1) = 0$ et $k_n(x)$ tend vers $\frac{1}{2}\sin 0 = 0$ quand $0 \leq x < 1$. On en déduit que la suite (k_n) converge simplement vers 0.

$$\sup_{x\in[0,1]} |k_n(x)| \geq \left|k_n\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right)\right| = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2},$$

donc (k_n) ne converge pas uniformément vers 0. Cependant, comme $|\sin x| \leq |x|$, on a

$$|k_n(x)| \leq \frac{1}{2}\pi x^n$$

donc

$$\sup_{x\in[0,a]} |k_n(x)| \leq \frac{1}{2}\pi a^n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0,$$

d'où la convergence uniforme de la suite (k_n) vers 0 sur tout intervalle de la forme $[0, a]$ avec $a < 1$.

Exercice 6.12.

1. On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|e^{-x} - f_n(x)\right| = \max\left(\sup_{x\in[0,n]} \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x}\right|, e^{-n}\right).$$

Il suffit donc de prouver que

$$\sup_{x\in[0,n]} \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

pour pouvoir conclure. Posons $g_n(x) = -\left(1-\frac{x}{n}\right)^n + e^{-x}$ pour $x \in [0,n]$. g_n est dérivable et

$$g_n'(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} - e^{-x} = e^{-x}\left(-1+\exp\left((n-1)\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)+x\right)\right)$$

et donc le signe de $g_n'(x)$ est exactement le signe de

$$h_n(x) = (n-1)\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) + x.$$

h_n est dérivable sur $[0,n]$ et $h_n'(x) = -\frac{n-1}{n-x} + 1 = \frac{-x+1}{n-x}$. h_n est donc croissante sur $[0,1]$, décroissante sur $[1,n]$. $h_n(0) = 0$, $h_n(1) > 0$ et $\lim_{x\to n} h_n(x) = -\infty$ donc h_n s'annule en un seul point x_n dans $]1,n[$. g_n est donc positive ou nulle et atteint sa borne supérieure en ce point x_n. En ce point, on a

$$\left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = e^{-x_n},$$

donc

$$g(x_n) = -\left(1-\frac{x_n}{n}\right)e^{-x_n} + e^{-x_n} = \frac{x_n}{n}e^{-x_n}.$$

Or, une étude rapide de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ montre que cette fonction est majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $\frac{1}{e}$ et donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|e^{-x} - f_n(x)\right| = \max\left(\sup_{x\in[0,n]} \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x}\right|, e^{-n}\right) \le \max\left(\frac{1}{ne}, e^{-n}\right)$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

2. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et soit $M > 0$ tel que, pour tout $z \in K$, on ait $|z| \le M$. L'inégalité

$$C_n^k \frac{1}{n^k} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\frac{1}{k!} \le \frac{1}{k!}$$

entraîne que

$$\forall z \in K, \qquad \left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}z^k\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right| z^k + \sum_{k>n}\left|\frac{z^k}{k!}\right|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right)M^k + \sum_{k>n}\frac{M^k}{k!} = e^M - \left(1+\frac{M}{n}\right)^n$$

et comme $(1+M/n)^n$ tend vers e^M quand $n \to +\infty$, on en déduit le résultat.

Exercice 6.13. Sur $[0,\pi]$, on a $0 \leq \sin x \leq x$ donc

$$0 \leq f_n(x) \leq nx^2 e^{-nx}.$$

Posons $g_n(x) = nx^2e^{-nx}$. g_n est dérivable sur $[0,\pi]$, $g_n'(x) = 2nxe^{-nx} - n^2x^2e^{-nx} = nxe^{-nx}(2-nx)$, ce qui prouve que g_n est croissante sur $[0, \frac{2}{n}]$, décroissante sur $[\frac{2}{n}, \pi]$ donc

$$\sup_{x\in[0,\pi]} |f_n(x)| \leq g_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n}e^{-2}$$

qui tend vers 0, donc il y a convergence uniforme de (f_n) vers 0 sur $[0,\pi]$.

Exercice 6.14.

1. Supposons que (f_n) converge uniformément vers f sur $]a,b[$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in]a,b[, \qquad \forall n \geq N, \qquad d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

Si on fixe $\varepsilon > 0$, N vérifiant l'assertion ci-dessus et $n \geq N$, on a

$$\forall x \in]a,b[, \qquad d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

Les fonctions f_n et f sont continues, donc $x \in [a,b] \mapsto d(f_n(x), f(x))$ est continue sur $[a,b]$ et inférieure ou égale à ε sur $]a,b[$, donc elle est inférieur ou égale à ε sur $[a,b]$. On a donc bien prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in [a,b], \qquad \forall n \geq N, \qquad d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence de (f_n) vers f sur $[a,b]$.

Si E est complet, alors (f_n) converge uniformément vers une fonction sur g continue sur $[a,b]$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall p \geq N, \quad \forall q \geq N, \quad d(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon.$$

Or, comme (f_n) converge uniformément vers f sur $]a,b[$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]a,b[, \quad \forall p \geq N, \quad \forall q \geq N, \quad d(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon.$$

Le même raisonnement que précédemment nous donne

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall p \geq N, \quad \forall q \geq N, \quad d(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon,$$

ce qui implique qu'il existe une fonction g continue de $[a,b]$ dans E telle que (f_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$. Enfin, il est clair que $g_{|]a,b[} = f$.

2. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à m. Soient $(x_0, \ldots, x_m)$ des points distincts. On définit la famille de polynômes

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j\neq i}(X - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}$$

pour $i = 0, \ldots, m$. Ces polynômes vérifient $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(x_i) = 1$. En particulier, le polynôme

$$P(X) - \sum_{i=0}^{m} P(x_i) L_i(X)$$

est de degré inférieur ou égal à m et est nul aux $m+1$ points $x_0, \ldots, x_m$, donc il est nul partout, ce qui prouve que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à m, on a

$$P(X) = \sum_{i=0}^{m} P(x_i) L_i(X).$$

En particulier, si (P_n) est une suite de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à m, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = \sum_{i=0}^{m} P_n(x_i) L_i(x).$$

Notons f la limite simple de (P_n). En faisant un passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i) L_i(x),$$

ce qui prouve que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m. Si on retire l'hypothèse portant sur le degré des polynômes, c'est faux. Par exemple, la suite de polynômes

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

converge simplement vers $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$, et cette fonction n'est pas un polynôme.

Exercice 6.15. On choisit $n+1$ points distincts $x_0, \ldots, x_n$ dans $[0,1]$. L'application

$$N_1 : f \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto |f(x_0)| + \ldots + |f(x_n)|$$

est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont claires. Si $N_1(f) = 0$, alors f polynôme de degré inférieur ou égal à n ayant $n+1$ racines, donc $f = 0$. L'application

$$N_2 : f \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

est aussi une norme. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que N_1 et N_2 sont équivalentes. Autrement dit, si une suite $(f_p) \in \mathbb{R}_n[X]$ converge simplement vers $g \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\lim_{p \to +\infty} N_1(f_p - g) = 0,$$

ce qui implique que

$$\lim_{p \to +\infty} N_2(f_p - g) = 0,$$

l'implication réciproque étant évidente. On en déduit que la topologie de la convergence simple et la topologie de la convergence uniforme sur $[0,1]$ coïncident sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6.16.

1. La suite de fonctions (f_n) est croissante et converge simplement vers f, donc $\forall x \in I = [a,b],\ f_n(x) \leq f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$U_n = \{x \in [a,b],\ 0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}.$$

D'après ce qui précède,

$$U_n = \{x \in [a,b],\ f(x) - f_n(x) < \varepsilon\},$$

ce qui prouve que (U_n) est une suite d'ouverts car c'est l'image réciproque par la fonction continue $f - f_n$ de l'ouvert $]-\infty, \varepsilon[$. Comme (f_n) converge simplement vers f, on en déduit que

$$\forall x \in [a,b], \qquad \exists N, \qquad \forall n \geq N, \qquad f(x) - f_n(x) < \varepsilon,$$

ce qui implique que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = [a,b]$. Comme $[a,b]$ est compact, il existe $n_0 < n_1 < \cdots < n_N$ tels que

$$[a,b] = U_{n_0} \cup \cdots \cup U_{n_N}.$$

Comme la suite de fonctions est croissante, on a

$$x \in U_n \quad \Rightarrow \quad f(x) - f_n(x) < \varepsilon, \quad \Rightarrow f(x) - f_{n+1}(x) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x \in U_{n+1},$$

donc la suite (U_n) est croissante. En particulier, on a $[a,b] = U_{n_N}$. On a donc bien prouvé que, pour tout $x \in [a,b]$ et pour tout $n \geq n_N$, on a $0 \leq f(x) - f_N(x) < \varepsilon$, ce qui entraîne la convergence uniforme.
Si f n'est pas continue, le résultat peut-être faux. Par exemple, si $f_n(x) = 1 - x^n$ sur $[0,1]$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f qui vaut 1 sur $[0,1[$ et 0 en 1. f n'est pas continue, donc la convergence ne peut-être uniforme.

2. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$, donc uniformément continue. Soit $\alpha > 0$ tel que $|x-y| \leq \alpha$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On considère une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ de pas inférieur ou égal à α, c'est-à-dire que, pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, $x_{i+1} - x_i \leq \alpha$. Comme la suite (f_n) converge simplement vers f, pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, il existe un rang n_i tel que

$$\forall i \in \{0, \ldots, N-1\}, \qquad \forall n \geq n_i, \qquad -\varepsilon \leq f_n(x_i) - f(x_i) \leq \varepsilon.$$

En particulier, si $N' = \max(n_0, \ldots, n_{N-1})$, si $n \geq N'$ et si $x \in [a,b]$, il existe $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ce qui implique que

$$f_n(x_i) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{i+1}) \quad \text{et} \quad f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1})$$

(car il est immédiat qu'une limite simple de fonctions croissante est croissante). Et donc,

$$f_n(x_i) - f(x_{i+1}) \leq f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_{i+1}) - f(x_i),$$

ce qui implique que

$$f_n(x_i)-f(x_i)+f(x_i)-f(x_{i+1}) \leq f_n(x)-f(x) \leq f_n(x_{i+1})-f(x_{i+1})+f(x_{i+1})-f(x_i),$$

soit encore

$$-2\varepsilon \leq f_n(x) - f(x) \leq 2\varepsilon.$$

De même, on a

$$-2\varepsilon \leq f(x) - f_n(x) \leq 2\varepsilon,$$

donc

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon.$$

On en déduit la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f.

Enfin, si on reprend l'exemple de la question précédente, on voit que l'hypothèse de continuité portant sur f est fondamentale.

Exercice 6.17. On raisonne comme dans l'exercice précédent. Tout d'abord,

$$\forall x, y \in [a, b], \qquad |f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|,$$

et donc en passant à la limite, on obtient

$$\forall x, y \in [a, b], \qquad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,$$

ce qui implique que la limite f est $M-$lipschitzienne.

On considère une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ de pas inférieur ou égal à $\alpha = \varepsilon/M$, c'est-à-dire que, pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, $x_{i+1} - x_i \leq \alpha$. Comme la suite (f_n) converge simplement vers f, pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, il existe un rang n_i tel que

$$\forall i \in \{0, \ldots, N-1\}, \qquad \forall n \geq n_i, \qquad |f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon.$$

En particulier, si $N' = \max(n_0, \ldots, n_{N-1})$, si $n \geq N'$ et si $x \in [a, b]$, il existe $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ce qui implique que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

d'où la convergence uniforme sur $[a, b]$.

Exercice 6.18.

1. La convergence simple découle du fait que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{n^2 + x^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

Par contre, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ puisque

$$\forall x > 0, \qquad \forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2 + n^2} \geq \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2 + (2p)^2} = \frac{px}{x^2 + 4p^2},$$

et donc, en prenant $x = p$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2 + n^2} \geq \frac{1}{5},$$

ce qui montre qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
Pour montrer la continuité de la limite simple f de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$, il aurait été commode que la convergence soit uniforme sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, mais ce n'est pas le cas. Pour contourner le problème, on va montrer que f est continue sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$, ce qui entraînera la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. Fixons donc un réel M positif quelconque. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall x \in [0, M], \qquad |u_n(x)| \leq \frac{M}{n^2},$$

et comme la série $\sum_n 1/n^2$ converge, $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, M]$. Ainsi, f limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0, M]$ est continue sur $[0, M]$. D'où le résultat.

2. Si on fixe $x \geq 0$, $\sum (-1)^n u_n(x)$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît. La série converge (ce qu'on savait déjà car on a montré qu'elle converge absolument), et de plus les restes sont majorés en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme qui les compose, donc

$$\left| \sum_{n=p}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{x}{x^2 + p^2} \leq \frac{\sqrt{x^2 + p^2}}{x^2 + p^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + p^2}} \leq \frac{1}{p}.$$

Cette majoration est indépendante de $x \geq 0$, et montre que les restes tendent uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
Il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \geq 0} u_n(x) \geq u_n(n) = \frac{1}{2n}$ et la série $\sum 1/(2n)$ diverge.

Exercice 6.19. On suppose donc que la suite (f_n) est une suite de fonctions réelles C^1 convergeant simplement vers f sur $[a, b]$. On suppose de plus que les moyennes de Césaro de f_n' convergent uniformément vers une fonction g, c'est-à-dire que la suite

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f_k' \right)_n$$

converge uniformément vers g. D'après l'exercice 1.44, question 2 du chapitre 1, la suite de fonctions

$$(F_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f_k \right)_n$$

converge simplement vers f. Comme la suite des dérivées (F_n') converge uniformément vers g, d'après le théorème 2.3.1, f est de classe C^1 et $f' = g$.

Exercice 6.20.

1. D'après le théorème de Stone-Weierstraß, il suffit de montrer que l'ensemble des polynômes forme une sous-algèbre de $C(E,\mathbb{R})$ qui sépare les points de X, que pour tout $x \in E$, il existe un polynôme f tel que $f(x) \neq 0$ et que pour tout polynôme f, $\overline{f}$ est encore un polynôme. Le fait que l'ensemble des polynômes forme une sous-algèbre est clair. Si $x \neq y$ sont dans X, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, il existe i tel que $x_i \neq y_i$. Le polynôme $x \mapsto x_i$ sépare x et y. De même, pour tout $x \in X$, il existe un polynôme f tel que $f(x) \neq 0$. Enfin si f est un polynôme de la forme

$$f(X) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha X^\alpha$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ alors

$$\overline{f(X)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \overline{a}_\alpha X^\alpha$$

2. Soit X le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. La fonction $z \mapsto z$ sépare les points de X et ne s'annule pas sur X, donc l'algèbre engendrée par z et $\overline{z}$ est partout dense dans $C(X,\mathbb{C})$. Désignons par φ l'application $t \mapsto e^{it}$ de $\mathbb{R}$ dans X. Pour tout $f \in C(X,\mathbb{C})$, $f \circ \varphi$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π. Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et $2\pi-$périodique, il existe une fonction $f \in C(X,\mathbb{C})$ telle que g soit de la forme $f \circ \varphi$. En effet, on construit f de la manière suivante : si $a \in X$, il existe t tel que $a = \varphi(t)$ et on pose $f(a) = g(t)$. Cette fonction est bien définie car, si $a = \varphi(t')$ alors $t - t'$ est multiple de 2π et donc $g(t) = g(t')$ car g est $2\pi-$périodique. Il reste à vérifier que f ainsi définie est bien continue. Pour cela, soit $(x_n)_n$ une suite de X qui converge vers $x \in X$. Montrons que $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$. Comme $(x_n)_n$ converge vers x, il existe un rang n_0 à partir duquel $(x_n)_n$ sera à valeurs dans $X \setminus \{-x\}$. Si θ_0 est un argument de $-x$, c'est-à-dire si $-x = \varphi(\theta_0)$, l'application $\psi :]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\mapsto X \setminus \{-x\}$ est un homéomorphisme (cela découle des propriétés de l'exponentielle complexe). En particulier, la suite $(\psi^{-1}(x_n))$ converge vers $\psi^{-1}(x)$ et $f(x_n) = g(\psi^{-1}(x_n))$ converge vers $g(\psi(x)) = f(x)$.
Puisque f est limite uniforme de polynômes en z et $\overline{z}$, $f \circ \varphi$ est limite uniforme de polynômes en e^{it} et e^{-it} ; autrement dit, toute fonction continue à valeurs complexes sur $\mathbb{R}$ et $2\pi-$périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques $\sum_{-n}^{n} a_p e^{ipt}$.

3. Soient X, Y deux espaces métriques compacts ; désignons par C l'espace normé $C(X \times Y, \mathbb{R})$ et par C_X (*resp.* C_Y la partie de C constituée par les fonctions f de la forme $(x,y) \mapsto g(x)$ (*resp.* $h(y)$). $C(X,\mathbb{R})$ sépare les points de X puisque, si $a, b \in X$ avec $a \neq b$, la fonction continue $x \mapsto d(a,x)$ sépare a et b ; de même, $C(Y,\mathbb{R})$ sépare les points de Y. D'autre part deux points distincts de $X \times Y$ ont, soit leurs abscisses distinctes, soit leurs ordonnées distinctes ; donc $C_X \cup C_Y$ sépare les points de $X \times Y$. Comme en outre cet ensemble contient la fonction 1, l'algèbre A engendrée par $C_X \cup C_Y$ est partout dense dans C. Cette algèbre A n'est autre que l'ensemble des fonctions de la forme

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) h_i(y).$$

4. Soit f continue sur $[1,+\infty[$ ayant une limite finie en $+\infty$. Soit $\varphi :]0,1/e] \mapsto -\ln t \in [1,+\infty[$. φ est bijective, continue. La bijection réciproque $\varphi^{-1}(t) = e^{-t}$ est continue, donc φ est un homéomorphisme. L'application $g(t) = f(\varphi(t))$ est continue sur $[0,1/e]$ car f admet une limite en $+\infty$. La question 1 ci-dessus montre que l'ensemble des polynômes en t est partout dense dans $C([0,1/e],\mathbb{R})$, donc $g(t)$ est limite uniforme sur $[0,1/e]$ de polynômes, ce qui implique que f est limite uniforme sur $[1,+\infty[$ d'une suite de fonctions de la forme $\sum_{p=0}^{n} a_p e^{-pt}$.

Exercice 6.21.

1. $C(X,\mathbb{R})$ sépare les points de X (donc aussi ceux de Y) puisque, si $a,b \in X$ avec $a \neq b$, la fonction continue $x \mapsto d(a,x)$ sépare a et b. Donc le théorème de Stone-Weierstraß nous donne l'existence de $g_\varepsilon \in C(X,\mathbb{R})$ telle que $|g_\varepsilon(y) - g(y)| < \varepsilon$ pour tout $y \in Y$.

2. Il suffit de montrer que $|\inf(\beta, f_\varepsilon) - f| < \varepsilon$ pour conclure (le raisonnement avec le sup étant identique). Soit $x \in Y$. Si $f_\varepsilon(x) \leq \beta$, alors $|\inf(\beta, f_\varepsilon(x)) - f(x)| = |f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$; tandis que si $f_\varepsilon(x) > \beta$, alors $f(x) \leq \beta < f_\varepsilon$, donc $|\inf(\beta, f_\varepsilon(x)) - f(x)| = |\beta - f(x)| = \beta - f(x) \leq f_\varepsilon(x) - f(x) \leq |f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$.
g_ε vérifie par construction $\alpha \leq g_\varepsilon \leq \beta$. Si x,y dans Y sont tels que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$ (ils existent car une fonction continue sur un compact atteint ses bornes) alors $g_\varepsilon(x) = \alpha$ et $g_\varepsilon(y) = \beta$, et donc g_ε a exactement les mêmes bornes que f.

3. Tout d'abord, il y a une coquille dans l'énoncé. Il faut prendre

$$h_n = \left(f - \sum_{k=1}^{n-1} h_k\right)_{\frac{1}{2^n}} \qquad \text{et non} \qquad h_n = \left(f - \sum_{k=1}^{n} h_k\right)_{\frac{1}{2^n}}.$$

L'inégalité à montrer n'est vraie que pour $n > 1$. Par construction, si $y \in Y$,

$$\left|f(y) - \sum_{k=1}^{n} h_k(y)\right| = \left|f(y) - \sum_{k=1}^{n-1} h_k(y) - h_n(y)\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme h_n a les mêmes bornes sur X que

$$f(y) - \sum_{k=1}^{n-1} h_k(y)$$

sur Y pour $n > 1$, on en déduit que $|h_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ sur X. En particulier, la suite de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n$$

converge uniformément sur X et coïncide avec f sur Y.

Exercice 6.22. Par récurrence, on a $P_n(t) \leq \sqrt{t}$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - P_{n+1}(t) = \sqrt{(t)} - P_n(t) - \frac{1}{2}(t - P_n^2(t)) &= \sqrt{t} - P_n(t) - \frac{1}{2}(\sqrt{t} - P_n(t))(\sqrt{t} + P_n(t)) \\ &= \left(\sqrt{t} - P_n(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right)\right)\end{aligned}$$

et donc l'hypothèse vraie au rang n implique la véracité de l'hypotèse au rang $n+1$ puisqu'on aura alors

$$1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}+P_n(t)\right)\geq 1-\sqrt{t}\geq 0.$$

En particulier, si $t>0$, on a

$$0\leq \sqrt{t}-P_{n+1}(t)\leq (1-\sqrt{t})(\sqrt{t}-P_n(t))$$

et donc

$$0\leq \sqrt{t}-P_n(t)\leq (1-\sqrt{t})^n\sqrt{t},$$

ce qui montre que $P_n(t)$ converge simplement vers $\sqrt{t}$ sur $[0,1]$. Pour montrer qu'il y a convergence uniforme, il suffit de montrer qu'on est dans le cadre des hypothès d'application du théorème de Dini (exercice 6.16). Or, on a $P_{n+1}(t)-P_n(t)=\frac{1}{2}(t-P_n^2(t))$. Il découle donc de ce qui précède que la suite $(P_n(t))_n$ est croissante et donc que la convergence est uniforme.

Exercice 6.24.

1. La formule du binôme nous donne

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}=(x+y)^n.$$

En dérivant par rapport à x, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1} y^{n-k}=n(x+y)^{n-1}, \tag{$*$}$$

et donc, en multipliant par x, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k} y^{n-k}=nx(x+y)^{n-1},$$

ce qui nous donne

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^{k} y^{n-k}=nx(x+y)^{n-1}.$$

Une nouvelle dérivation par rapport à x de $(*)$ nous donne

$$\sum_{k=2}^{n} C_n^k k(k-1) x^{k-2} y^{n-k}=n(n-1)(x+y)^{n-2}$$

et donc, en multipliant par x^2, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} C_n^k k(k-1) x^{k} y^{n-k}=n(n-1)x^2(x+y)^{n-2},$$

ce qui nous donne

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1)x^k y^{n-k} = n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}.$$

2. On obtient immédiatement

$$\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} k r_k(x) = nx, \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) r_k(x) = n(n-1)x^2.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 r_k(x) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)r_k(x) + \sum_{k=0}^{n} k r_k(x) - 2nx\sum_{k=0}^{n} k r_k(x) + n^2x^2\sum_{k=0}^{n} r_k(x)\\ &= n(n-1)x^2 + nx - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx(1-x).\end{aligned}$$

3. f est continue sur $[0,1]$ qui est compact, donc uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \alpha$ implique $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. En particulier,

$$|f(x) - B_n(f)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| r_k(x).$$

Notons A l'ensemble des k tels que $|\frac{k}{n} - x| \leq \alpha$. Notons $M = \sup_{[0,1]} |f|$. Alors,

$$|f(x) - B_n(f)| \leq \sum_{k\in A} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| r_k(x) + \sum_{k\notin A} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| r_k(x).$$

On a

$$\sum_{k\in A} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| r_k(x) \leq \varepsilon \sum_{k\in A} r_k(x) \leq \varepsilon,$$

et on a

$$\begin{aligned}\sum_{k\notin A} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| r_k(x) &\leq \sum_{k\notin A} 2M r_k(x) = 2M \sum_{k\notin A} \frac{(k-nx)^2}{(k-nx)^2} r_k(x)\\ &\leq \frac{2M}{n^2\alpha^2}\sum_{k\notin A}(k-nx)^2 r_k(x) \leq \frac{2M}{n^2\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 r_k(x) = \frac{2M}{n^2\alpha^2} nx(1-x) \leq \frac{M}{2n\alpha^2}.\end{aligned}$$

En particulier,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\alpha^2}.$$

En particulier, si on choisit n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\frac{M}{2n\alpha^2} \leq \varepsilon$, on aura alors

$$\forall n \geq n_0, \qquad \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leq 2\varepsilon$$

d'où la convergence uniforme de la suite $(B_n(f))_n$ vers f sur $[0,1]$.