

Mathématiques Générales 1 - Parcours PEI

FONCTIONS USUELLES

1 Fonctions trigonométriques : Formules à connaître.

Formules de duplication. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que x, y et $x + y$ ne soient pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et pas de la forme $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Formules de linéarisation. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Formules de déphasage. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas de la forme $k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(\pi - x) = -\tan x, \quad \tan(x + \pi) = \tan x.$$

Limites et dérivées.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin'(x) = \cos x, \quad \cos'(x) = -\sin x.$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction tan est dérivable sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ et, pour tout x dans cet intervalle,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

2 Fonctions trigonométriques réciproques.

2.1 La fonction arc sinus.

Définition. La fonction $\varphi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni x \mapsto \sin x \in [-1, 1]$ est une bijection continue et dérivable de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$.

Pour tout élément y de $[-1, 1]$ il existe donc un unique $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin x = y$. Cet élément x est appelé l'*arc sinus* de y et on note $x = \arcsin y$.

En particulier, on a

$$\forall y \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin y) = y$$

et

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \arcsin(\sin x) = x.$$

La fonction sinus étant dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et sa dérivée ne s'annulant pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que arcsin est dérivable sur $[-1, 1]$ privé des points $\varphi(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$.

En particulier, arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$, et pour tout $y \in] -1, 1[$, comme $\sin(\arcsin y) = y$, on obtient, en dérivant, $\arcsin'(y) \times \sin'(\arcsin y) = 1$, soit encore $\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$.

Or, pour $y \in] -1, 1[$, $\cos(\arcsin y) \geq 0$ car $\arcsin y \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On en déduit que, pour $y \in] -1, 1[$, $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)} = \sqrt{1 - y^2}$, donc

$$\forall y \in] -1, 1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

D'où le graphe de la fonction arc sinus :

2.2 La fonction arc cosinus.

Définition. La fonction $\psi : [0, \pi] \ni x \mapsto \cos x \in [-1, 1]$ est une bijection continue et dérivable de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

Pour tout élément y de $[-1, 1]$ il existe donc un unique $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos x = y$. Cet élément x est appelé l'*arc cosinus* de y et on note $x = \arccos y$. En particulier, on a

$$\forall y \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos y) = y$$

et

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos x) = x.$$

La fonction cosinus étant dérivable sur $[0, \pi]$, et sa dérivée ne s'annulant pas sur $]0, \pi[$, on en déduit que $\arccos$ est dérivable sur $[-1, 1]$ privé des points $\psi(0) = 1$ et $\psi(\pi) = -1$.

En particulier, $\arccos$ est dérivable sur $] -1, 1[$, et pour tout $y \in] -1, 1[$, comme $\cos(\arccos y) = y$, on obtient, en dérivant, $\arccos'(y) \times \cos'(\arccos y) = 1$, soit encore $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sin(\arccos y)}$.

Or, pour $y \in] -1, 1[$, $\sin(\arccos y) \geq 0$ car $\arccos y \in]0, \pi[$.

On en déduit que, pour $y \in] -1, 1[$, $\sin(\arccos y) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos y)} = \sqrt{1 - y^2}$, donc

$$\forall y \in] -1, 1[, \quad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

D'où le graphe de la fonction arc cosinus :

2.3 La fonction arc tangente.

Définition. La fonction $\phi :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ni x \mapsto \tan x \in \mathbb{R}$ est une bijection continue et dérivable de $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout élément y de $\mathbb{R}$ il existe donc un unique $x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x = y$. Cet élément x est appelé l'*arc tangente* de y et on note $x = \arctan y$.

En particulier, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan y) = y$$

et

$$\forall x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan x) = x.$$

La fonction tangente étant dérivable sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et sa dérivée ne s'annulant pas, on en déduit que $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, comme $\tan(\arctan y) = y$, on obtient, en dérivant, $\arctan'(y) \times \tan'(\arctan y) = 1$, soit encore $\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)}$.

On en déduit que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

D'où le graphe de la fonction arc tangente :

3 La fonction exp.

Proposition. Pour tout $x \geq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Preuve. On le prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$ et pour $x \geq 0$, nous avons

$$e^x \geq 1$$

donc la propriété est vraie.

Supposons qu'elle soit vraie au rang n , c'est-à-dire que

$$\forall t \geq 0, \quad e^t \geq 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!},$$

et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

En intégrant cette inégalité entre 0 et $x \geq 0$, nous avons

$$\forall x \geq 0, \quad \int_0^x e^t dx \geq \int_0^x \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \right) dt = \int_0^x dt + \int_0^x \frac{t}{1!} dt + \int_0^x \frac{t^2}{2!} dt + \cdots + \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt.$$

Or, comme pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^x \frac{t^k}{k!} dt = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

on en déduit, comme d'une part

$$\forall x \geq 0, \quad \int_0^x e^t dx = e^x - 1$$

et que d'autre part,

$$\int_0^x dt + \int_0^x \frac{t}{1!} dt + \int_0^x \frac{t^2}{2!} dt + \cdots + \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

que

$$\forall x \geq 0, \quad e^x - 1 \geq x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ceci montre que la propriété est vraie au rang $n+1$. On a donc prouvé la proposition par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Proposition. *Nous avons les limites suivantes :*

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln x = 0.$$

Preuve. Prouvons la première limite. Soit $\alpha > 0$ et soit n un entier strictement plus grand que α . En appliquant la proposition précédente, nous avons

$$\forall x \geq 0, \quad e^x \geq 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^n}{n!},$$

donc

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{e^x}{x^\alpha} \geq \frac{x^{n-\alpha}}{n!} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

car $n - \alpha > 0$.

Prouvons la seconde limite. Posons $\beta = 1/\alpha$. Comme $\beta > 0$, nous avons

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u^\beta} = +\infty.$$

En particulier, si on pose $u = \ln x$, alors quand $x \rightarrow +\infty$, on a $u \rightarrow +\infty$. Donc

$$\frac{e^{(\ln x)}}{(\ln x)^\beta} = \frac{x}{\ln^\beta x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On en déduit en prenant la puissance α -ième que

$$\left(\frac{x}{\ln^\beta x} \right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{\ln^{\beta\alpha} x} = \frac{x^\alpha}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc que

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Prouvons la troisième limite. Si on pose $u = 1/x$, alors quand $x \rightarrow 0+$, on a $u \rightarrow +\infty$. On en déduit que

$$\frac{\ln \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^\alpha}} = -x^\alpha \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

et la proposition est prouvée.

4 Fonctions hyperboliques.

Définition. On appelle *sinus hyperbolique*, *cosinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique* les trois fonctions notées sh, ch et th et définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}.$$

On vérifie immédiatement que ces trois fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que

$$\text{ch}' = \text{sh} \quad \text{sh}' = \text{ch} \quad \text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2}.$$

La fonction ch est paire, les fonctions sh et th sont impaires.

Comme la fonction ch est à valeurs dans $[1, +\infty[$, on en déduit que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, nulle en 0, que $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$, $\lim_{-\infty} \text{sh} = -\infty$.

La fonction ch est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, vaut 1 en 0, et est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $\lim_{\pm\infty} \text{ch} = +\infty$.

La fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, nulle en 0. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

Voici le graphe de ces trois fonctions :

Formule importante. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Preuve. En effet, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = \left(\frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} \right) = (e^x)(e^{-x}) = 1.$$

5 Fonctions hyperboliques réciproques.

5.1 La fonction argument sinus hyperbolique.

Définition. La fonction $\varphi : \mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{sh} x \in \mathbb{R}$ est une bijection continue et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout élément y de $\mathbb{R}$ il existe donc un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{sh} x = y$. Cet élément x est appelé l'*argument sinus hyperbolique* de y et on note $x = \operatorname{arg sh} y$.

En particulier, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(\operatorname{arg sh} y) = \operatorname{arg sh}(\operatorname{sh} y) = y.$$

La fonction sinus hyperbolique étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulant pas, on en déduit que $\operatorname{arg sh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $y \in]-1, 1[$, comme $\operatorname{sh}(\operatorname{arg sh} y) = y$, on obtient, en dérivant, $\operatorname{arg sh}'(y) \times \operatorname{sh}'(\operatorname{arg sh} y) = 1$, soit encore $\operatorname{arg sh}'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arg sh} y)}$.

Or, pour $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(\operatorname{arg sh} y) \geq 1$. Comme $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, on en déduit que, pour $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(\operatorname{arg sh} y) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{arg sh} y)} = \sqrt{1 + y^2}$, donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arg sh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

D'où le graphe de la fonction argument sinus hyperbolique :

5.2 La fonction argument cosinus hyperbolique.

Définition. La fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \operatorname{ch} x \in [1, +\infty[$ est une bijection continue et dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.

Pour tout élément y de $[1, +\infty[$ il existe donc un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\operatorname{ch} x = y$. Cet élément x est appelé l'*argument cosinus hyperbolique* de y et on note $x = \operatorname{arg ch} y$.

En particulier, on a

$$\forall y \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{ch}(\operatorname{arg ch} y) = y$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \operatorname{arg ch}(\operatorname{ch} x) = x$$

La fonction cosinus hyperbolique étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulant pas, hormis en 0, on en déduit que $\operatorname{arg ch}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ privé de $\psi(0) = 1$, et pour tout $y \in]1, +\infty[$, comme $\operatorname{ch}(\operatorname{arg ch} y) = y$, on obtient, en dérivant, $\operatorname{arg ch}'(y) \times \operatorname{ch}'(\operatorname{arg ch} y) = 1$, soit encore $\operatorname{arg ch}'(y) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arg ch} y)}$.

Or, pour $y \in]1, +\infty[$, $\operatorname{sh}(\operatorname{arg ch} y) \geq 0$. Comme $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, on en déduit que, pour $y \in]1, +\infty[$, $\operatorname{sh}(\operatorname{arg ch} y) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arg ch} y) - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$, donc

$$\forall y \in]1, +\infty[, \quad \operatorname{arg ch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

D'où le graphe de la fonction argument cosinus hyperbolique :

5.3 Expressions explicites des fonctions hyperboliques réciproques.

Proposition.

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arg \operatorname{sh} y = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arg \operatorname{ch} y = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right)$$

Preuve. En effet, si y et x dans $\mathbb{R}$ sont tels que

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y,$$

en posant $X = e^x$, on a $X - 1/X = 2y$, ce qui équivaut après multiplication par $X > 0$ à

$$X^2 - 2yX - 1 = 0.$$

La résolution des équations de degré 2 montre que

$$X = y - \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{ou bien} \quad X = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Or la première solution est strictement négative car, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y < \sqrt{y^2 + 1}$. Comme X doit être strictement positif et que la seconde solution l'est car $\sqrt{y^2 + 1} > -y$, on en déduit que $X = y + \sqrt{y^2 + 1}$, donc que $x = \ln X = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Ceci achève la preuve du premier point.

Pour le second point, si $y \in [1, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}^+$ sont tels que

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y,$$

en posant $X = e^x$, on a $X + 1/X = 2y$, ce qui équivaut après multiplication par $X > 0$ à

$$X^2 - 2yX + 1 = 0.$$

La résolution des équations de degré 2 montre que

$$X = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{ou bien} \quad X = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Supposons $y > 1$. Comme $x > 0$, on en déduit que $X = e^x > 1$. Il faut donc voir laquelle des deux solutions est strictement plus grande que 1.

Or la première solution est, pour $y > 1$, strictement inférieure à 1. En effet, si ce n'est pas le cas, on a alors

$$\begin{aligned} y - \sqrt{y^2 - 1} \geq 1 &\iff y - 1 \geq \sqrt{y^2 - 1} \iff (y - 1)^2 \geq y^2 - 1 \quad (\text{car } y - 1 > 0) \\ &\iff y^2 - 2y + 1 \geq y^2 - 1 \iff -2y \geq -2 \iff y \leq 1 \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Par contre, la seconde solution est, pour $y > 1$, strictement supérieure à 1 car

$$y + \sqrt{y^2 - 1} \geq y > 1.$$

On en déduit que $X = y + \sqrt{y^2 - 1}$, donc que $x = \ln X = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right)$.

Ceci achève la preuve du second point.

5.4 Fonction argument tangente hyperbolique.

Définition. La fonction $\theta : \mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{th} x \in]-1, 1[$ est une bijection continue et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $] - 1, 1[$.

Pour tout élément y de $] - 1, 1[$ il existe donc un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{th} x = y$. Cet élément x est appelé l'*argument tangente hyperbolique* de y et on note $x = \arg \operatorname{th} y$.

En particulier, on a

$$\forall y \in] - 1, 1[, \quad \operatorname{th} (\arg \operatorname{th} y) = y$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arg \operatorname{th} (\operatorname{th} x) = x$$

La fonction tangente hyperbolique étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulant pas, on en déduit que $\arg \operatorname{th}$ est dérivable sur $] - 1, 1[$, et pour tout $y \in] - 1, 1[$, comme $\operatorname{th} (\arg \operatorname{th} y) = y$, on obtient, en dérivant, $\arg \operatorname{th}'(y) \times \operatorname{th}'(\arg \operatorname{th} y) = 1$, soit encore $\arg \operatorname{th}'(y) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\arg \operatorname{th} y)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\arg \operatorname{th} y)} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\arg \operatorname{th} y)} = \frac{1}{1 - y^2}$.

D'où le graphe de la fonction argument tangente hyperbolique :

Proposition.

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argth} y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right).$$

Preuve. En effet, si y et x dans $\mathbb{R}$ sont tels que

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y,$$

en posant $X = e^x$, on a $\frac{X - 1/X}{X + 1/X} = y$, ce qui équivaut après multiplication par $X > 0$ en haut et en bas à

$$\frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} = y$$

soit encore à

$$X^2 - 1 = yX^2 + y \quad \Leftrightarrow \quad X^2(1 - y) = 1 + y \quad \Leftrightarrow \quad X^2 = \frac{1+y}{1-y}.$$

Comme $X > 0$, nous obtenons donc

$$X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}},$$

puis

$$x = \ln X = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right).$$

5.5 Formules de duplication.

Nous avons les formules suivantes, valables pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \quad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \quad \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \quad \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \quad \operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

$$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x.$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x \quad \operatorname{th} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

Pour tous réels p et q :

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2} \quad \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2\operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2} \quad \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}.$$

Formule de Moivre : Pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx \quad (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx - \operatorname{sh} nx.$$