

Mathématiques Générales IDEVOIR MAISON : CALCUL DE LA SOMME DES $\frac{1}{k^2}$.

On se propose de calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2},$$

en suivant un raisonnement original de Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand du début du XIX^{ème} siècle.

Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2n+1)x = \operatorname{Im}(\cos x + i \sin x)^{2n+1}$.

En déduire que

$$\sin(2n+1)x = \sum_{k=0}^n C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1} x \cos^{2n-2k} x.$$

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $\cotan x = \frac{1}{\tan x}$.

Soit P_n le polynôme défini par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k X^{n-k}.$$

Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1} x} = P_n(\cotan^2 x).$$

3. Montrez que les nombres $\cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k = 1, \dots, n$ sont tous distincts et sont les racines de P_n .

4. Si un polynôme de degré n qui possède n racines distinctes s'écrit

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0,$$

exprimez la somme de ses racines en fonction de a_n et a_{n-1} .

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}.$$

5. Montrez que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cotan^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cotan^2 x.$$

6. En déduire un encadrement de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

7. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$