Devoir Maison
Triplets pythagoriciens.

Un triplet pythagoricien est un triplet de 3 entiers $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x^2+y^2 = z^2$. Un triplet sera dit primitif si les trois entiers x, y, z n'ont aucun facteur commun (c-à-d sont premiers entre eux).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a forcément $x^2 \equiv 0$ [4] ou ou $x^2 \equiv 1$ [4].
2. En déduire que si (x, y, z) est un triplet pythagoricien primitif, alors x et y sont de parités différentes (l'un pair et l'autre impair) et z est impair.
3. Montrer que si $y \equiv 1[2]$, alors $y^2 \equiv 1[8]$. Montrer ensuite pour tout $x \in \mathbb{N}$, x^2 ne peut prendre que 3 valeurs différentes modulo 8. Lesquelles ?
   En déduire l'amélioration du résultat précédent : si (x, y, z) est un triplet pythagoricien primitif, alors x est divisible par 4 et y impair (ou l'inverse).
4. On choisit un x impair dans $\mathbb{N}$. Quelle est alors la parité de $\frac{x^2-1}{2}$? Vérifier que les trois entiers x, $\frac{x^2-1}{2}$ et $\frac{x^2+1}{2}$ forment un triplet pythagoricien.
5. On choisit x divisible par 4. Quelle est alors la parité de $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$? Vérifier que les trois entiers x, $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$ et $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1$ forment un triplet pythagoricien.
6. Application : Utiliser ces deux résultats pour trouver 10 triplets pythagoriciens.
7. Soient p, q deux entiers premier entre eux de parités différentes. Montrer que le triplet

$$(PQ) \qquad x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2$$

   est pythagoricien primitif et que x est impair *(pour le caractère primitif, raisonner par l'absurde).*
8. * Montrer que réciproquement, tout triplet pythagoricien primitif avec x impair peut s'écrire sous la forme (PQ) ci-dessus.
   Pour cela, on écrira $y = 2u$ (car y est pair), $2s = z - x$ et $2t = x + z$ (pourquoi est-ce possible ?). On montrera que s et t sont premiers entre eux. Ensuite de $st = u^2$ on déduira que s et t sont deux carrés. On les notera p^2 et q^2 et il restera alors à vérifier que p et q sont premiers entre eux de parités différentes.
9. Application : Utiliser le résultat de la question 7 pour trouver 10 nouveaux triplets pythagoriciens irréductibles.