

Correction du DM 1

Exercice 3

Calculer le module et l'argument des nombres complexes :

1. $\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$

On écrit $\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$. On a $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Donc le module de $\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ est $\sqrt{2}$ et un argument est $\frac{\pi}{6}$.

La forme polaire est $\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. $\left(\frac{2+2i}{1-i} \right)^{20}$

On décompose $2+2i$ et $1-i$ sous forme polaire. C'est à dire :

$$- 2+2i = 2(1+i) = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(si vous le voyez pas directement commencez par calculer le module, puis l'argument).

$$- 1-i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

D'où

$$\left(\frac{2+2i}{1-i} \right)^{20} = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} \right)^{20} = (2e^{i\frac{\pi}{4}-(-i\frac{\pi}{4})})^{20} = 2^{20}(e^{i\frac{\pi}{2}})^{20} = 2^{20}e^{i10\pi} = 2^{20}$$

10π est égal à 0 modulo 2π , donc un argument de ce nombre est 0 et son module 2^{20} . Et donc la forme cartésienne est 2^{20} .

3. $\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}$

On met sous forme polaire le nombre $1-i\sqrt{3}$.

On a $1-i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Ce qui donne

$$\frac{-2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-2}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = -e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(-\pi+\frac{\pi}{3})} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Le module est donc 1 et un argument $-\frac{2\pi}{3}$. La forme cartésienne est $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 11

Résoudre $(z-i)^5 = (z+i)^5$:

On remarque que si $z = -i$ alors $(z-i)^5 = (-2i)^5$ et $(z+i)^5 = 0$ donc $z = -i$ n'est pas solution de l'équation $(z-i)^5 = (z+i)^5$.

L'équation $(z - i)^5 = (z + i)^5$ est équivalente à

$$\frac{(z - i)^5}{(z + i)^5} = 1 \quad (1)$$

Posons $Z = \frac{z-i}{z+i}$. L'équation (1) devient donc $Z^5 = 1$. Cette équation a pour solutions les racines cinquièmes de l'unité. Elle a cinq racines distinctes dans $\mathbb{C}$ car elle est de degré 5. Ces racines sont

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}} \\ z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}} \\ z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\frac{6\pi}{5}-2i\pi} = e^{-i\frac{4\pi}{5}} \\ z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{8\pi}{5}-2i\pi} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} \end{cases} \quad (2)$$

Remarque : Une équation polynômiale à coefficients réels qui a une racine complexe u a toujours aussi son conjugué $\bar{u}$ comme racine. Démontrez-le!!

On résout maintenant notre équation de départ en posant

1. $Z_0 = \frac{z_0-i}{z_0+i}$ d'où $1 = \frac{1-i}{1+i}$. Cette équation n'a pas de solution puisque $1+i \neq 1-i$. Donc Z_0 n'existe pas.
2. $Z_1 = \frac{z_1-i}{z_1+i}$ ce qui donne $e^{i\frac{2\pi}{5}} = \frac{z_1-i}{z_1+i}$. On a donc

$$\begin{aligned} e^{i\frac{2\pi}{5}} &= \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \\ (z_1 + i)e^{i\frac{2\pi}{5}} &= z_1 - i \\ z_1(e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1) &= -ie^{i\frac{2\pi}{5}} - i \\ z_1 &= -i \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}} + 1}{e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1} \end{aligned} \quad (3)$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}} + 1}{e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{5}}(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{-i\frac{\pi}{5}})}{e^{i\frac{\pi}{5}}(e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{-i\frac{\pi}{5}})} \\ &= \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \end{aligned} \quad (4)$$

Donc, en remplaçant dans (3), on a

$$\begin{aligned} z_1 &= -i \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}} + 1}{e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1} = -i \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \\ &= -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{1}{\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)} = \cotan\left(-\frac{\pi}{5}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Le même calcul entraîne que l'on obtient

3. $z_2 = \cotan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$

4. $z_3 = \cotan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
5. $z_4 = \cotan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Enfin on a obtenu 4 solutions. Y en a-t-il d'autres ? Il nous faut revenir à l'équation originale. On remarque que l'on peut écrire

$$(z - i)^5 = (z + i)^5 \Leftrightarrow (z - i)^5 - (z + i)^5 = 0 \quad (6)$$

Or si on développe les polynômes $(z - i)^5$ et $(z + i)^5$ qui sont tous les deux de degré 5, le terme de degré 5 est justement z^5 dans les deux cas. Il va donc se simplifier.

Pour montrer que le polynôme P est de degré 4, il faudrait pour être parfaitement rigoureux développer $(z - i)^5 - (z + i)^5$ en utilisant pour chacun des termes le binôme de Newton. Faites le en exercice !!

Donc le polynôme $P(z) = (z - i)^5 - (z + i)^5$ est en fait de degré 4.

Il y a donc 4 solutions exactement à l'équation $P(z) = 0$, donc à notre équation.

IMPORTANT : une équation polynomiale dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 0$, où P est de degré n , a exactement n racines (en comptant les multiplicités).

Exercice 20 :

Comme $\frac{d-a}{b-c}$ est imaginaire pur on a

$$\frac{d-a}{b-c} = -\overline{\left(\frac{d-a}{b-c}\right)} = -\frac{\bar{d}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{c}} \quad (7)$$

Donc

$$\begin{aligned} (d-a)(\bar{b}-\bar{c}) &= -(b-c)(\bar{d}-\bar{a}) \\ d\bar{b} - d\bar{c} - a\bar{b} + a\bar{c} &= -b\bar{d} + b\bar{a} + c\bar{d} - c\bar{a} \end{aligned} \quad (8)$$

De même, comme $\frac{d-b}{a-c}$ est imaginaire pur on a

$$\frac{d-b}{a-c} = -\overline{\left(\frac{d-b}{a-c}\right)} = -\frac{\bar{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \quad (9)$$

Donc

$$\begin{aligned} (d-b)(\bar{a}-\bar{c}) &= -(a-c)(\bar{d}-\bar{b}) \\ d\bar{a} - d\bar{c} - b\bar{a} + b\bar{c} &= -a\bar{d} + a\bar{b} + c\bar{d} - c\bar{b} \end{aligned} \quad (10)$$

On remarque qu'on a des termes communs dans (8) et (10). On soustrait les équations deux à deux, il reste, en simplifiant à chaque ligne tout ce qu'on peut

$$\begin{aligned} d\bar{b} - d\bar{c} - a\bar{b} + a\bar{c} - (d\bar{a} - d\bar{c} - b\bar{a} + b\bar{c}) &= -b\bar{d} + b\bar{a} + c\bar{d} - c\bar{a} \\ &\quad - (-a\bar{d} + a\bar{b} + c\bar{d} - c\bar{b}) \\ d\bar{b} - a\bar{b} + a\bar{c} - d\bar{a} + b\bar{a} - b\bar{c} &= -b\bar{d} + b\bar{a} - c\bar{a} + a\bar{d} - a\bar{b} + c\bar{b} \\ d\bar{b} + a\bar{c} - d\bar{a} - b\bar{c} &= -b\bar{d} - c\bar{a} + a\bar{d} + c\bar{b} \end{aligned} \quad (11)$$

On cherche alors à factoriser ce qu'on peut dans la dernière ligne de ce qui précède

$$\begin{aligned}
d\bar{b} + a\bar{c} - d\bar{a} - b\bar{c} &= -b\bar{d} - c\bar{a} + a\bar{d} + c\bar{b} \\
d(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{c}(a - b) &= \bar{d}(a - b) + c(\bar{b} - \bar{a}) \\
d(\bar{b} - \bar{a}) - c(\bar{b} - \bar{a}) &= \bar{d}(a - b) - \bar{c}(a - b) \\
(d - c)(\bar{b} - \bar{a}) &= (a - b)(\bar{d} - \bar{c}) \\
\frac{d - c}{a - b} &= \frac{\bar{d} - \bar{c}}{\bar{b} - \bar{a}} \\
\frac{d - c}{a - b} &= -\frac{\bar{d} - \bar{c}}{\bar{a} - \bar{b}} = -\overline{\left(\frac{d - c}{a - b}\right)}
\end{aligned} \tag{12}$$

Donc le nombre $\frac{d-c}{a-b}$ a une partie réelle nulle, donc il est imaginaire pur.

Pour l'interprétation géométrique, il suffit de faire un dessin ! En effet le fait que $\frac{d-a}{b-c}$ est imaginaire pur donne que les droites (AB) et (DC) sont orthogonales. De même le fait que $\frac{d-b}{a-c}$ est imaginaire pur donne le fait que (DB) et (AC) sont orthogonales.

Ainsi si on considère le triangle ABC le point D est à la fois sur les hauteurs issues de AB et de AC , donc c'est l'orthocentre du triangle. Donc (AD) est aussi orthogonale à (BC) .