Université de Provence	2008–2009

Mathématiques Générales 1

Devoir surveillé n° 1

Exercice 1 Pour chacune des phrases qui suit, dire en le justifiant, si elles sont vraies ou fausses, et dans ce dernier cas, écrire leur négation en utilisant le formalisme mathématique.

1. Tout entier naturel multiple de 9 est multiple de 3.
2. Tout entier naturel multiple de 3 et de 2 est multiple de 6.
3. Tout entier naturel multiple de 2 et de 4 est multiple de 8.
4. Soit E un ensemble. $\forall A,\ B \in \mathcal{P}(E),\ A \cup B = E \Rightarrow A^c \cup B^c = E$.
5. $\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n + 1$

Exercice 2 Dénombrement

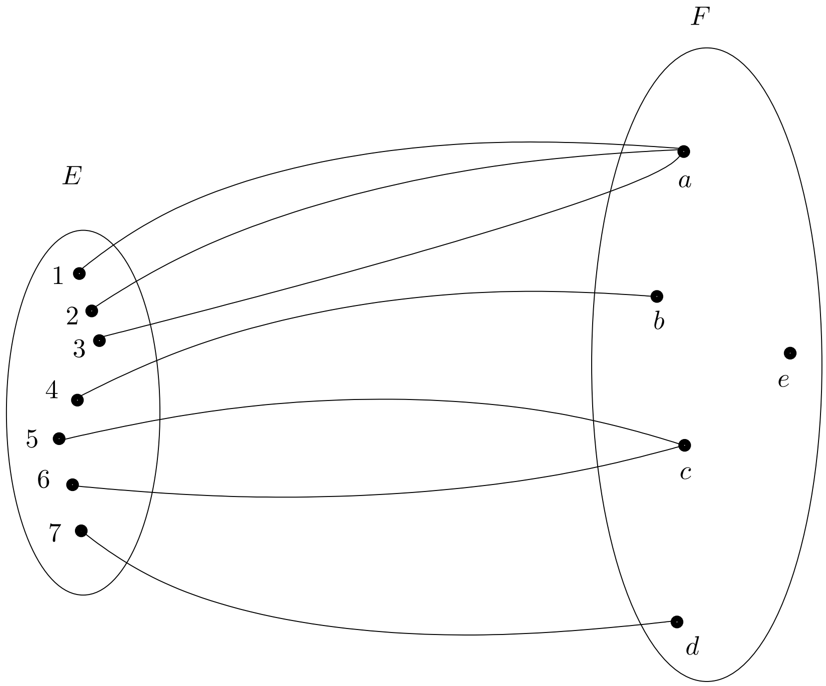
1. Calculer le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble à 6 éléments.
2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k = \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k$

Exercice 3 Soit $f : E \to F$ une application. On définit sur E la relation binaire $\mathcal{S}$ en posant :

$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{S}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

1. Vérifier que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

   Soit x un élément de E. On notera $C(x)$ sa classe d'équivalence.
2. Compléter : $x \in C(x_0) \Leftrightarrow x ... x_0 \Leftrightarrow f(x) = ...$
3. Deux exemples.
   (a) Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie en posant $f(x) = x^2$. Déterminer $C(0)$ puis $C(x_0)$ pour $x_0 > 0$.
   (b) Soit f l'application de E vers F représentée par le diagramme sagital suivant :



i. f est-elle injective ? surjective ? (Justifier votre réponse).

ii. Dessiner en rouge les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{S}$.

iii. Quel est le cardinal de $E/\mathcal{S}$?

iv. On considère l'application $\varphi : E/\mathcal{S} \to F$ définie par

$$\forall \alpha \in E/\mathcal{S},\ \varphi(\alpha) = f(x)$$

où $x \in \alpha$. Dessiner l'application φ. Que remarque-t-on ?

v. Cette fois, on définit l'application Ψ de $E/\mathcal{S}$ dans $f(E)$ en posant

$$\forall \alpha \in E/\mathcal{S},\ \Psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$$

Dessiner l'application Ψ. Que remarque-t-on ? Ψ s'appelle la décomposition canonique de f.

Exercice 4 1. Soient A et B deux parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}_+$. On définit l'ensemble AB en posant $AB = \{ab, a \in A, b \in B\}$. Montrer que AB est majoré et que $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$.

2. Soient $A = [-3, -1[$ et $B = [1, 4]$. Déterminer $\sup(A)$ et $\sup(B)$. Déterminer l'ensemble AB puis calculer $\sup(AB)$. Conclure.

Exercice 5 1. Soient x et x' deux réels. En calculant $e^{ix}e^{-ix'}$ de deux manières, calculez $\cos(x - x')$ et $\sin(x - x')$ en fonction de $\cos(x), \cos(x'), \sin(x)$ et $\sin(x')$.

2. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$. (On pourra considérer $x = \frac{\pi}{4}$ et $x' = \frac{\pi}{6}$).

3. Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 3\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\sqrt{3}z_1 + \overline{z_1}\right)$. Donner les formes cartésienne et polaire de z_2.

4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^3 = z_2$.