

Mathématiques Générales 1

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Exercice 1 (3 points) Racines nièmes de l'unité

1. Donner les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^4 = -\frac{81}{2}(1 + i\sqrt{3})$.
2. Les exprimer toutes à l'aide du nombre $3e^{i\pi/3}$ et des racines quatrièmes de l'unité.
3. En déduire la somme des solutions de cette équation.

Exercice 2 (4 points) Fonctions hyperboliques

1. Rappeler l'expression, la dérivée et les limites de la fonction th. Tracer son graphe.
2. Retrouver l'expression de la fonction réciproque argh avec les fonctions usuelles.
3. En déduire la dérivée de la fonction argh
4. Simplifier $\operatorname{argth}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

Exercice 3 (4 points) Fonctions trigonométriques

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$. Montrer que f est dérivable et calculer la dérivée de f .
2. En simplifiant le résultat et en prenant une primitive, montrer que f peut s'exprimer simplement en fonction de $\cos 4x$.

Exercice 4 (3 points) Équation complexe.

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (7 + 2i)z + 13 + 13i = 0$.

Exercice 5 (6 points) Fonctions usuelles

1. Étudier la fonction :

$$f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}).$$

2. Montrer que

$$2 \arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

sur un intervalle que l'on précisera.

3. Retrouver cette égalité en posant (avec justification) $x = \sin \theta$.