Université de Provence 2012–2013

Introduction à l'Analyse

DEVOIR SURVEILLÉ NO 1.

Exercice 1 Rappeler la définition de la fonction arc cos. Calculer la dérivée sur son domaine de dérivabilité et donner une allure de son graphe

Exercice 2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas les équations suivantes :

1. $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 2x\right)$.

3. $\tan x = \tan(3x - \pi)$

Exercice 3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y' = \cos x - \sin x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 4 Donner les deux expressions de la dérivée de tan sur son domaine de définition et dérivabilité.

En déduire, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ une expression de $\cos x$ en fonction de $\tan x$ et une expression de $\sin x$ en fonction de $\tan x$.

Pour tout $x > 0$, simplifier

$$\cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right).$$

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas multiple de 2π, si

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos kx \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin kx,$$

alors

$$C_n(x) = \cos\frac{nx}{2}\,\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \sin\frac{nx}{2}\,\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas multiple de 2π, si

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\cos kx \qquad \text{et} \qquad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\sin kx,$$

alors

$$c_n(x) = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \qquad \text{et} \qquad s_n(x) = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas multiple de π, si

$$\gamma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx \qquad \text{et} \qquad \sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2 kx,$$

alors

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{2}\left(n+1+\cos nx\,\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\right) \qquad \text{et} \qquad \sigma_n(x) = \frac{1}{2}\left(n+1-\cos nx\,\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\right)$$

4. On rappelle que, si $n \in \mathbb{N}$ et si $k \in \mathbb{N}$ est tel que $k \leq n$, on note

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

avec la convention $0! = 1$.

Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si

$$\Gamma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx \qquad \text{et} \qquad \Sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx,$$

alors

$$\Gamma_n(x) = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_n(x) = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}.$$

Exercice 6 1. Soient x et y deux nombres réels tels que $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$.

Montrez que

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

2. Montrez que pour tout réel positif x, on a

$$0 \leq \arctan x \leq x.$$

3. Calculer (en justifiant toutes les étapes très soigneusement) $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$. On pourra pour cela utiliser l'inégalité $\frac{\pi}{2} > \frac{120}{119}$.

Exercice 7 1. Trouver des réels A et B tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, on ait

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$ l'équation différentielle

$$2xy' + y = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

avec $y(1) = 0$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$ l'équation différentielle

$$2xy' + y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$$

avec $y(1) = 0$.