

Mathématiques Générales 1

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Exercice 1 1. Nous avons $-\frac{81}{2}(1+i\sqrt{3}) = 81e^{i\frac{4\pi}{3}} = 3^4e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation proposée sont donc

$$3e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad 3e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad 3e^{i(\frac{\pi}{3}+\pi)} = 3e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \quad 3e^{i(\frac{\pi}{3}+3\frac{\pi}{2})} = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

2. Les racines cherchées sont alors égales à $3e^{i\pi/3}$ multiplié par les racines quatrièmes de l'unité. Ce sont donc

$$3e^{i\pi/3}, \quad 3e^{i\pi/3}i, \quad -3e^{i\pi/3}, \quad -3e^{i\pi/3}i.$$

3. La somme des racines est donc

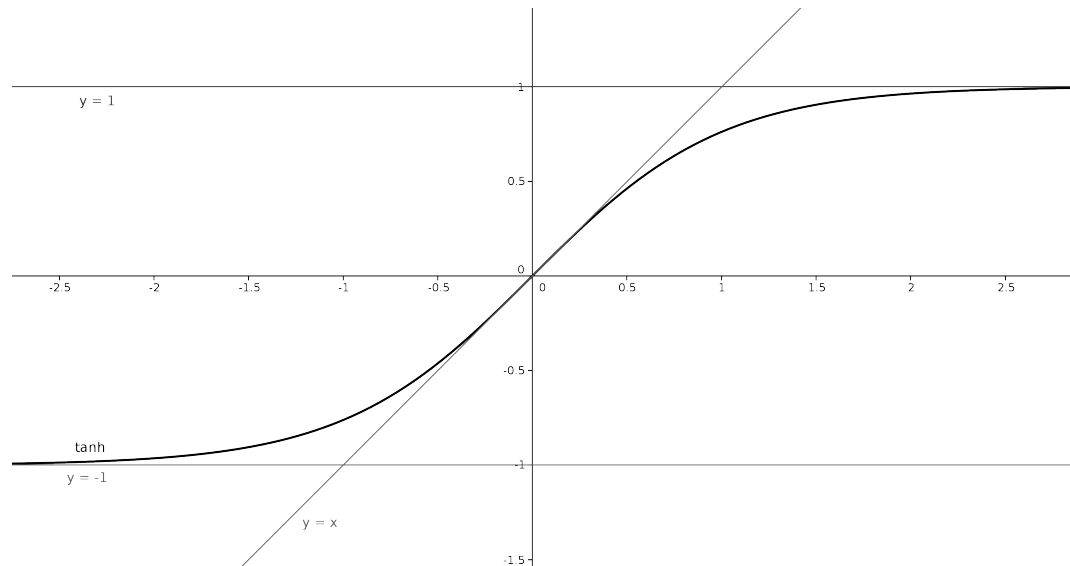
$$3e^{i\pi/3}(1+i-1-i) = 0.$$

De manière plus générale, la somme des racines n -ièmes d'un nombre complexe quelconque est nulle.

Exercice 2 1. La fonction th est définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Sa dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{th}'x = 1 - \text{th}^2x = \frac{1}{\text{ch}^2x}$. On en déduit que th est strictement croissante. La fonction th est aussi impaire. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\text{th } x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

et que e^{-2x} tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\text{th } x$ tend vers 1 quand $x \rightarrow +\infty$. Le caractère impair de th nous donne alors $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$. D'où l'allure du graphe :



2. La fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$. Sa bijection réciproque est une application bijective de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ appelée $\arg \text{th}$. Pour tout $x \in] -1, 1[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\arg \text{th } x = y \Leftrightarrow \text{th } y = x \Leftrightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x \Leftrightarrow (e^{2y} - 1) = (e^{2y} + 1)x$$

$$\Leftrightarrow e^{2y}(1 - x) = 1 + x \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right).$$

Donc :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arg \text{th } x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right).$$

3. On en déduit que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arg \operatorname{th}' x = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]' = \frac{1}{2} [\ln(1+x)]' - \frac{1}{2} [\ln(1-x)]' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\frac{x^2-1}{x^2+1} < 1$. Nous avons aussi $\frac{x^2-1}{x^2+1} > -1$ si et seulement si $x^2-1 > -x^2-1$, soit si et seulement si $2x^2 > 0$, soit si et seulement si $x \neq 0$.

On peut donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, considérer $\arg \operatorname{th} \left(\frac{x^2-1}{1+x^2} \right)$. Nous avons alors

$$\arg \operatorname{th} \left(\frac{x^2-1}{1+x^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\frac{x^2-1}{1+x^2}}{1-\frac{x^2-1}{1+x^2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\frac{1+x^2+x^2-1}{1+x^2}}{\frac{1+x^2-x^2+1}{1+x^2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{\frac{2}{1+x^2}} \right) = \frac{1}{2} \ln(x^2) = \ln|x|.$$

Exercice 3 1. f est dérivable comme somme de puissances de fonctions dérivables. Nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \sin x.$$

2. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= 4 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = 2(2 \sin x \cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \\ &= 2(\sin 2x)(-\cos 2x) = -\sin 4x. \end{aligned}$$

En intégrant cette égalité, nous obtenons

$$f(x) = \frac{1}{4} \cos(4x) + C$$

où C est une constante. Or $f(0) = \sin^4 0 + \cos^4 0 = 1 = C + \frac{1}{4} \cos(4 \times 0) = C + \frac{1}{4}$. Donc $C = \frac{3}{4}$. Nous avons donc obtenu :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3 + \cos(4x)}{4}.$$

Exercice 4 Le discriminant de l'équation est

$$\Delta = (7+2i)^2 - 4(13+13i) = 49 - 4 + 28i - 52 - 52i = -7 - 24i$$

Si $z = a + ib$ est une racine de Δ , nous avons

$$a^2 - b^2 = -7 \quad \text{et} \quad 2ab = -24.$$

Or $a^2 + b^2 = |z|^2 = |\Delta| = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$. Nous obtenons donc $a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 = 18$. Donc $a^2 = 9$, ce qui implique que $a = \pm 3$.

L'égalité $2ab = -24$ nous donne alors $b = -\frac{12}{a}$. Les racines de Δ sont donc $3 - 4i$ et $-3 + 4i$.

On en déduit que les racines de l'équation proposée sont

$$\frac{7+2i+3-4i}{2} = 5-i \quad \text{et} \quad \frac{7+2i-3+4i}{2} = 2+3i.$$

Exercice 5 1. $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ est défini si et seulement si $1-x^2 \geq 0$, ce qui équivaut à $x \in [-1, 1]$ et si

$$-1 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2(1-x^2) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(1-x^2) \leq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

ce qui est toujours le cas.

On en déduit que la fonction f est définie sur $[-1, 1]$. Elle est de plus dérivable en x si et seulement si $2x\sqrt{1-x^2}$ est différent de ± 1 (car la fonction arc sin n'est pas dérivable en ± 1) et si $x \neq \pm 1$ (car en ces points la fonction $\sqrt{1-x^2}$ n'est pas dérivable), donc si et seulement si

$$4x^2(1-x^2) \neq 1 \Leftrightarrow x^2(1-x^2) \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \neq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \neq 0$$

et si $x \neq \pm 1$.

La fonction f est donc dérivable sur $] -1, 1[\setminus \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1, 1[\setminus \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, \quad f'(x) &= \frac{(2x\sqrt{1-x^2})'}{\sqrt{1-(2x\sqrt{1-x^2})^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2} + 2x \frac{\frac{1}{2} \times (-2x)}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \\ &= \frac{\frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1-2x^2}{\sqrt{(1-2x^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1-2x^2}{|1-2x^2|}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \left] -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[, \quad f'(x) &= \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \forall x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[, \quad f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \forall x \in \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right[, \quad f'(x) &= \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

2. Comme les fonctions $2 \arcsin x$ et $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ ont la même dérivée sur $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$, on en déduit que

$$2 \arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) + C$$

où C est une constante sur $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$.

Si on fait $x = 0$, on obtient que $C = 0$, donc $2 \arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ sur $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$.

Enfin cette égalité est encore valable en $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ puisque les deux fonctions f et $\arcsin$ sont continues.

Nous avons donc obtenu que

$$\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right], \quad 2 \arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}).$$

3. Pour $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$, nous avons $x = \sin \theta$ avec $\theta = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$.

Or $2x\sqrt{1-x^2} = 2 \sin \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} = 2 \sin \theta \cos \theta$ (car $\cos \theta \geq 0$), donc $2x\sqrt{1-x^2} = \sin 2\theta$.

Comme $2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, nous avons alors

$$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \arcsin(\sin 2\theta) = 2\theta = 2 \arcsin x.$$