Université de Provence	2009–2010

Mathématiques Générales 1

Devoir surveillé n°2

Exercice 1 *Borne supérieure* (2 points)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes

1. m est un minorant de A
2. P n'est pas un majorant de A
3. A est majorée
4. A n'est pas minorée

Exercice 2 *Borne supérieure* (3 points)

Soit E l'ensemble des réels de la forme $(1 - 1/n)/(1 + 1/n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble E admet-il une borne inférieure ? une borne supérieure ? Si oui, quelles sont-elles ?

Exercice 3 *Equation complexe* (3 points)

1. Déterminer l'inverse de $-1 + i$
2. Résoudre l'équation
$$\frac{2w}{1-w} = -1 + i$$
3. En déduire toutes les solutions de l'équation
$$\frac{1-z^5}{2z^5} = -(1+i)/2$$

Exercice 4 *Complexes* (4 points)

1. On considère dans le plan complexe les trois points distincts M d'affixe $z \in \mathbb{C}$, A d'affixe $a \in \mathbb{C}$ et B d'affixe $b \in \mathbb{C}$. Montrez que A, B et M sont alignés si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b}$ est réel.
2. On considère dans le plan complexe les points A d'affixe 1 et B d'affixe -1.
   A tout point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$.
   (a) Etablissez que $|z'| = 1$.
   (b) Etablissez que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
   (c) Donner une construction géométrique du point M' connaissant M.

Exercice 5 *Dénombrement* (4 points)

1. Soit un ensemble E de cardinal $n \geq 2$ et a et b deux éléments distincts de E. Déterminer le nombre de parties de E à p éléments qui :
   (a) contiennent a et b ;
   (b) contiennent a mais pas b ou bien b mais pas a ;
   (c) ne contiennent ni a ni b ;

   En déduire que pour tout entier naturel p et tout entier naturel $n \geq p+2$, on a :
   $$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}.$$
2. Retrouvez le résultat par un calcul direct ;

Exercice 6 *Dénombrement* (6 points)

Soit un ensemble E de cardinal n.

1. Trouver le nombre de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \cap Y = \emptyset$ et $X \cup Y = E$ (pour une partie X donnée, on pourra identifier toutes les parties Y possibles)
2. Trouver le nombre de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \cap Y = \emptyset$.
3. Trouver le nombre de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \cup Y = E$.
4. Trouver le nombre de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \subset Y$ (pour une partie Y, on pourra compter le nombre de parties X satisfaisant à la condition).
5. Trouver le nombre de triplets (X, Y, Z) de parties de E telles que $X \subset Y \subset Z$. (pour une partie Z donnée, on pourra compter le nombre de parties X et Y possibles, en se ramenant à la question précédente).
6. Trouver le nombre de triplets (X, Y, Z) de parties de E telles que $X \subset Z$ et $Y \subset Z$.