Mathématiques Générales 1

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

DURÉE 2H

Il sera tenu compte de la présentation et de la précision de la rédaction, particulièrement dans l'exercice 2.

Il est demandé de rendre impérativement 2 copies :
l'une comportant les exercices 1 et 2, l'autre, les exercices 3,4,5,6.

Exercice 1 *équations différentielles* (6 pts)

1. **Ordre 1.** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante, avec la condition initiale $y(1) = 0$:

$$(x^2 + 1)y' = \frac{3x^2 + 1}{x} y + x(x^2 + 1)$$

2. **Ordre 2.** Soit l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = f(x)$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- (a) La résoudre avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$, lorsque $f(x) = e^x$ puis lorsque $f(x) = x^2$.
- (b) En déduire les solutions de l'équation $y'' + 3y' + 2y = e^x + x^2$, toujours avec les mêmes conditions initiales.

Exercice 2 *Applications* (5 pts)

Soit f une application de X dans Y .

1. Donner la définition de f injective, f surjective et f bijective.
2. Rappeler la définition de $f(A)$ pour $A \subset X$, et de $f^{-1}(A')$ pour $A' \subset Y$.
3. Que peut-on dire sur f si $\exists y \in Y, f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$?
4. Que peut-on dire sur f si $\exists y \in Y, f^{-1}(\{y\}) = \{\alpha, \beta\}$?
5. Dans quel cas a-t-on $f(X) = Y$? et $f^{-1}(Y) = X$?
6. Si A' et B' sont deux parties de l'ensemble Y , prouver que $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.
7. Si A et B sont deux parties de l'ensemble X , prouver que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

TSVP →

Exercice 3 Applications (2 pts)

Soient $X = Y = \mathbb{R}$ et la fonction f définie par : $f(x) = \text{th}(\text{ch}(x))$.

1. f est-elle injective ? surjective ? *justifier*.
2. Déterminer $f^{-1}([2; +\infty[)$, ainsi que $f(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Ensembles (2 pts)

Soient E un ensemble non vide et A, B, C , trois parties de E . Démontrer que :

$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap B^c = A \cap C^c .$$

Exercice 5 Dénombrement (2 pts)

Au loto il y a 49 numéros : 1 2 ... 48 49. Une grille de loto est composée de 6 chiffres.

1. Combien peut-on écrire de grilles différentes ?
2. Combien peut-on écrire de grilles différentes comprenant uniquement des multiples de 5 ?

On justifiera brièvement les réponses.

Exercice 6 Dénombrement (5 pts)

Un clavier de 9 touches numérotées : 1 2 3 4 5 6 A B C permet de composer le code d'entrée d'un immeuble constitué d'une lettre suivie de d'un nombre à 3 chiffres distincts ou non.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?
6. Combien y a-t-il de codes comportant uniquement les chiffres 2,3 et 5 ?

On justifiera brièvement toutes les réponses.