

Devoir 2 - Correction exercice 2

- (1) On a $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$. En effet, tout nombre complexe de module 1 n'est pas nul, donc appartient à $\mathbb{C}^*$.

On a $\mathbb{U} \neq \emptyset$, car $1 \in \mathbb{U}$.

Pour tout $x, y \in \mathbb{U}$, on a $|xy^{-1}| = |x||y^{-1}| = |y|^{-1} = 1$, et donc $xy^{-1} \in \mathbb{U}$.

Par conséquent, $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

- (2) On cherche les solutions de l'équation $x^6 - 1 = 0$. On pose $x = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient

$$\begin{aligned} x^6 &= 1 \\ (re^{i\theta})^6 &= e^0 \\ r^6 e^{6i\theta} &= e^0. \end{aligned}$$

En prenant les modules, on obtient $r^6 = 1$ et $r = 1$, car $r \in \mathbb{R}^+$. Par conséquent, on a $e^{6i\theta} = e^0$, soit

$$\begin{aligned} 6\theta &= 0 & [2\pi] \\ \theta &= 0 & [\frac{2\pi}{6}] \\ \theta &= 0 & [\frac{\pi}{3}]. \end{aligned}$$

L'ensemble des racines de P_6 est donc

$$\mathcal{S} = \{e^{\frac{k\pi}{3}} \mid k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 5\}.$$

On a, dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P_6(X) &= (X - e^{\frac{0 \times i\pi}{3}})(X - e^{\frac{1 \times i\pi}{3}})(X - e^{\frac{2 \times i\pi}{3}})(X - e^{\frac{3 \times i\pi}{3}})(X - e^{\frac{4 \times i\pi}{3}})(X - e^{\frac{5 \times i\pi}{3}}) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}). \end{aligned}$$

[On aurait raisonner de façon suivante : On a $X^6 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1)$. Donc x est racine de $P(X)$ si et seulement si x est racine de $H_1(X) = X^3 - 1$ ou x est racine de $H_2(X) = x^3 + 1$. On a $x_1 = 1$ racine évidente de $H_1(x)$. Ainsi,

$$H_1(X) = (X - 1)(X^2 + X + 1).$$

Les racines de $X^2 + X + 1$ sont $x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. De même, $x_4 = -1$ est racine évidente de $H_2(X)$ et

$$H_2(X) = (X + 1)(X^2 - X + 1).$$

Les racines de $X^2 - X + 1$ sont $x_5 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $x_6 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Pour factoriser dans $\mathbb{R}$, on regroupe par 2 les facteurs dans la factorisation dans $\mathbb{C}$ où apparaît une racine complexe non-réelle et sa conjuguée. On obtient, comme factorisation de P_6 dans $\mathbb{R}$:

$$P_6(X) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

- (3) On généralise à P_n la méthode vue précédemment. On cherche les solutions de l'équation $x^n - 1 = 0$. On pose $x = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$r^n e^{ni\theta} = e^0.$$

En prenant les modules, comme $r \in \mathbb{R}^+$, on a $r = 1$ et donc,

$$\begin{aligned} n\theta &= 0 & [2\pi] \\ \theta &= 0 & [\frac{2\pi}{n}]. \end{aligned}$$

L'ensemble des racines de P_n est donc

$$\mathcal{S} = \{e^{\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Il y a donc n racines distinctes. On a, dans $\mathbb{C}$:

$$P_n(X) = (X - e^{\frac{0 \times 2i\pi}{n}})(X - e^{\frac{1 \times 2i\pi}{n}}) \cdots (X - e^{\frac{(n-1) \times 2i\pi}{n}}).$$

L'ordre de multiplicité de chaque racine est donc 1.

- (4) On a $\mathbb{U}_n \neq \emptyset$ car 1 est racine évidente de P_n , donc $1 \in \mathbb{U}_n$.

Soit $x \in \mathbb{U}_n$. On a $x^n = 1$ et donc $|x| = 1$, et $x \in \mathbb{U}$. Ainsi, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Soient $x, y \in \mathbb{U}_n$. On a $x^n = 1$ et $y^n = 1$. Par conséquent,

$$(x \times y^{-1})^n = \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} = 1,$$

et donc $xy^{-1} \in \mathbb{U}_n$. Ainsi $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$

- (5) On a

$$P_6(X) = (X^4 - 1)(X^{12} + X^8 + X^4 + 1)$$

et

$$P_{11}(X) = (X^3 - 1)(X^8 + X^5 + X^2) + X^2 - 1.$$

- (6) On a $n = k \times m$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Soit x une racine du polynôme $P_m(X)$. On a

$$\begin{aligned} x^m - 1 &= 0 \\ x^m &= 1 \\ (x^m)^k &= 1^k \\ x^{km} &= 1 \\ x^n &= 1 \\ x^n - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, x est aussi racine de P_n .

- (7) Toute racine de P_m est racine de P_n , et leur ordre dans P_m est plus petit que leur ordre dans P_n ($1 \leq 1$). Donc P_m divise P_n .