Université d'Aix-Marseille 2012–2013

Introduction à l'Analyse

Devoir surveillé no 2.

Extrait du sujet du Concours Commun 2012, 1ère année, des écoles des mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes : Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 (2 pts). Soit $(u_n)_n$ une suite de réels et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Donner les définitions de :

- $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

- $(u_n)_n$ ne converge pas vers ℓ.

- $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

2. Montrez que si $(u_n)_n$ est croissante majorée, $(u_n)_n$ converge.

Exercice 2 (2 pts). Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}^*$.

Montrez qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel on ait $|u_n| \geq \frac{|\ell|}{2}$.

Montrez que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq N}$ converge.

Exercice 3 (3 pts). Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = \cos x$$

avec $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 4 (3 pts). Résolvez sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle

$$y'\sqrt{1-x^2} + y = xe^{-\arcsin x}$$

avec $y(0) = 0$.

Exercice 5 (3 pts). Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$$

1. Montrez que la suite $(u_n)_n$ est majorée par 7.

2. Montrez que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

3. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} u_n$?

Exercice 6 *Extrait du concours commun 1ère année 2009 des écoles des mines d'Albi, Alès, Douai et Nantes.*
Dans tout ce problème, on notera ch , sh et th les fonctions hyperboliques définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Question préliminaire. **(1,5 pts).** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$x \leq \operatorname{sh} x \leq x + \frac{x^2}{2} \operatorname{sh} x.$$

(*Indication : Etudier deux fonctions. Pour l'une de ces fonctions, il faudra dériver deux fois.*)

Partie A. Etude d'une fonction. (6 pts).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$.

1. Etudier la parité de f.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Déterminer la limite de f en 0.

4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} \left[x - \operatorname{th} x \right]$$

5. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{th} X < X$.

6. En déduire le tableau de variations de f.

7. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = f(x)$ et $F(0) = 1$. Montrer que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie B. Une équation différentielle. (2 pts).

On considère l'équation différentielle (E) suivante, que l'on va résoudre sur différents intervalles

$$xy' + y = \operatorname{ch} x \tag{E}$$

1. Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E).

2. Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.

3. Justifier que la fonction F (définie dans la question A.7.) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.