Université d'Aix-Marseille 2012–2013

Introduction à l'Analyse

Devoir surveillé no 3.

Extrait du sujet du Concours Commun 2012, 1ère année, des écoles des mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes : Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 (3 points)

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes. Montrez que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si toutes les suites extraites de $(u_n)_n$ convergent vers ℓ.

2. (*Extrait du concours d'entrée aux CCP* 2010) Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée. La suite $(u_n)_n$ est-elle forcément convergente ? On justifiera soigneusement la réponse à cette question par une démonstration ou par un contre-exemple.

Exercice 2 (4,5 points)

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels, décroissante et qui tend vers 0.

Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

2. Montrez que toute suite de réels croissante et majorée converge.

3. Énoncez et démontrez le théorème des suites adjacentes.

4. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrez que ces deux suites convergent vers la même limite (on ne demande pas de déterminer la valeur exacte de la limite).

Exercice 3 (2,5 points)

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = 13x^2 - 8x + 15$$

avec $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 4 (5,5 poins)

1. Déterminer les constantes A, B telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\} \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$\overrightarrow{T.S.V.P.}$

2. Trouver des constantes a, b et c telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

En déduire les primitives sur $]0, +\infty[$ de

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)}.$$

3. Calculer les primitives sur $]0, +\infty[$ de

$$\frac{\arctan x}{(x+1)^2}.$$

On pourra faire une intégration par parties.

4. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x(x+1)y' + y = \arctan x.$$

Exercice 5 (4 points) Calculer

sur $[1, +\infty[$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x-1}}$ (par un changement de variable)

sur $]0, +\infty[$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$ avec $a > 0$ (poser $x = 1/u$).

Exercice 6 (6 points)

Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = 1 \times \cdots \times n$ si $n \geq 1$ et $0! = 1$.

1. Montrez que $e^a = 1 + \int_0^a e^x dx$. A l'aide d'une intégration par parties, montrez que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-x)e^x dx$.

2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$e^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

3. On se propose de montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$$

converge vers e^a lorsque $n \to +\infty$.

3. a. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq e^a \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. b. On définit la suite $(v_n)_n$ par $v_n = \dfrac{a^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrez qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $0 \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

Montrez que, pour tout $n \geq n_0$, $\qquad 0 \leq v_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_{n_0}$.

Montrez que $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

3. c. Conclure.