Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales 1

Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 Combinatoire (5 points)

1. L'ordre dans lequel les cartes sont choisies est indifférent donc on utilise les combinaisons. On choisit 5 cartes parmi 32 donc il y a $C_{32}^5 = 201\,376$ mains possibles.
2. Il y a 4 possibilités pour le roi, et il reste ensuite à choisir 4 cartes parmi 28 (on enlève tous les rois, puisque on ne doit en avoir qu'un seul). Il y a donc $4\,C_{28}^4 = 20\,475$ possibilités.
3. Si on choisir un roi (4 possibilités), puis 4 cartes parmi les 31 restantes, on obtient $4\,C_{31}^4$ possibilités. Mais le résultat est faux car on a compté plusieurs fois les mains qui contiennent deux rois ou plus. Par exemple, la main qui contient le roi de coeur et le roi de trèfle sera compté une fois en choisissant le roi de coeur en premier, puis le roi de trèfle parmi les 4 cartes restantes, et encore une fois en choisissant trèfle en premier, et coeur en second. Pour bien faire il faut par exemple compter les mains qui ne contiennent aucun roi C_{28}^5 et les soustraire au nombre total de mains C_{32}^5. Ou encore ajouter les mains qui contiennent exactement un roi : $4C_{28}^4$, celles qui en contiennent exactement 2 : $C_4^2C_{28}^3$, celles qui en contiennent exactement 3 : $C_4^3C_{28}^2$, et celles qui en contiennent exactement 4 : $C_4^4C_{28}^1$. Ce qui donne
$$C_{32}^5 - C_{28}^5 = C_4^4C_{28}^4 + C_4^2C_{28}^3 + C_4^3C_{28}^2 + C_4^4C_{28}^1 = 103\,096$$
4. Il y a 4 possibilités pour le roi, et $C_4^2 = 6$ pour les dames. Il restent à choisir 2 cartes parmi les 24 qui ne sont ni des rois ni des dames. Cela donne $4 \times 6 \times C_{24}^2 = 6\,624$ possibilités.
5. On doit prendre l'as de pique, et il reste à choisir 2 trèfles parmi 8 (C_8^2 possibilités), et 2 cartes parmi les 23 restantes. Il y a donc $C_8^2\,C_{23}^2 = 7084$ mains possibles.
6. Les rois et trèfles représentent 11 cartes (ne pas oublier le roi de trèfle), et il nous reste donc à choisir 5 cartes parmi 21. Cela donne $C_{21}^5 = 20\,349$ mains sans roi ni trèfles. toutes les autres mains contiennent au moins un roi ou un trèfle, il y en a $C_{32}^5 - C_{21}^5 = 181027$.
7. Il faut faire attention au roi de trèfle. Si on le choisi parmi les rois, il reste à choisir un trèfle parmi les 7 autres, et 3 cartes parmi les 21 restantes, ce qui donne $7\,C_{21}^3$ possibilités. Si on choisit au contraire un des 3 autres rois, il faut choisir 2 trèfles parmi les 8 restants, et 2 cartes parmi les 21 restantes, donc $3C_8^2\,C_{21}^2$ possibilités. Le nombre total de possibilités est
$$7\,C_{21}^3 + 3\,C_8^2\,C_{21}^2 = 26950$$

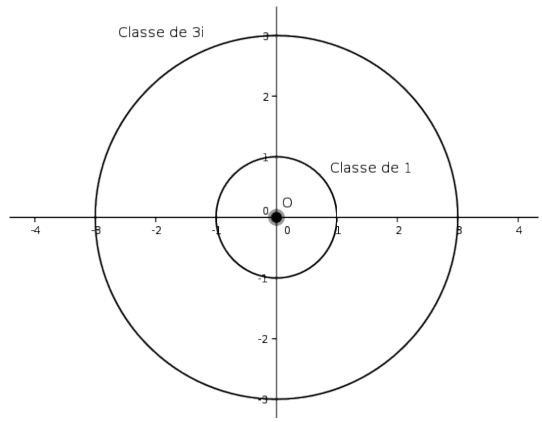
Exercice 2 Relation d'équivalence (3 points)

1. Soient z, z', z'' trois nombres complexes.
   On a toujours $|z| = |z'|$ donc la relation est réflexive.
   Si $|z| = |z'|$, on peut aussi écrire $|z'| = |z|$ donc la relation est symétrique.
   Si $|z| = |z'|$ et $|z'| = |z''|$, alors on a aussi $|z| = |z''|$ donc la relation est transitive.
   C'est donc une relation d'équivalence.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. La classe d'équivalence de z est l'ensemble des $z' \in \mathbb{C}$ qui sont en relation avec z.

$$C_z = \{z' \in \mathbb{C}|\ |z'| = |z|\}$$

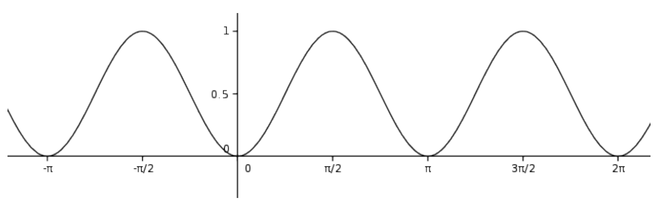
C'est donc le cercle de centre 0 et de rayon $|z|$. En particulier, la classe de 0 est réduite à 0. La classe de 1 est le cercle unité.



3.

Exercice 3 Applications (3 points)

1. La fonction g est bien définie, continue et dérivable sur $I = [-\pi, 2\pi]$, car c'est la composition de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (donc la composition est possible) : sin et la fonction carrée, bien définies, continues et dérivables. Restreindre l'ensemble de départ ne modifie pas les propriétés de la fonction.
Sa dérivée est $g'(x) = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$.
$\sin y$ est positif lorsque $y \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi, (2k+1)\pi]$ (ce que l'on pourrait écrire $x \in [0, \pi]\,(mod.\ 2\pi)$).
Donc $\sin(2x) \geq 0$ lorsque $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[k\pi, \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$. Vu notre ensemble de départ, on voit donc que $g'(x) \geq 0$ lorsque $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, et que $g'(x) < 0$ dans le cas contraire.
Pour dessiner précisemment son graphe, on peut remarquer que $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, et qu'on doit donc dessiner une fonction de type cosinus de période π, d'amplitude $\frac{1}{2}$, centré autour de la valeur $\frac{1}{2}$ et déphasée à cause du moins. Cela donne



2. $g\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right)$ est l'image par g de l'intervalle $[\pi/4, 3\pi/4]$:

$$g\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right) = \{y \in \mathbb{R}|\ \exists x \in [-\pi, 2\pi],\ \sin^2 x = y\}$$

Sur le graphe, on voit que la fonction g est croissante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, passant de $\frac{1}{2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ à $1 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Ensuite, elle est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\frac{3\pi}{2}\right]$, passant de 1 à $\frac{1}{2}$. Toutes les valeurs entre $\frac{1}{2}$ et 1 sont prises ce qui nous donne

$$g\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$g^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ est l'ensemble des antécédent de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$g^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = \left\{x \in [-\pi, 2\pi]|\, g(x) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$$

D'après le dessin, on voit que $g(x) \leq \frac{1}{2}$ quand $x \in \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$. Donc

$$g^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$

Exercice 4 Ensembles (2 points)

1. Soit $x \in X$.

$$x \in f^{-1}(A'^c) \Leftrightarrow f(x) \in A'^c \Leftrightarrow NON\big(f(x) \in A'\big) \Leftrightarrow NON\big(x \in f^{-1}(A')\big) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A')^c$$

   Cela montre bien l'égalité demandée.

2. On pourrait penser que de manière similaire, $f(A^c) = f(A)^c$. Mais c'est faux. Prenons par exemple la fonction carrée sur $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, et $A = \mathbb{R}^+$. On a alors $f(A)^c = (\mathbb{R}^+)^c = \mathbb{R}^{-*}$. Par contre $f(A^c) = f(\mathbb{R}^{-*}) = \mathbb{R}^{+*}$. Les deux ensembles sont disjoints et il n'y a aucune inclusion de l'un dans l'autre.

Exercice 5 Applications (6 points)

1. $f : E \to F$ est injective lorsque $\quad \forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
   f est surjective lorsque $\quad \forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.
   f est bijective lorsque $\quad \forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y$.
   f n'est pas injective lorsque $\quad \exists x, x' \in E,\ f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$.
   f n'est pas surjective lorsque $\quad \exists y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) \neq y$.
   f n'est pas bijective lorsque $\quad \big(\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) = y\big)$ ou $\big(\exists x, x' \in E, x \neq x'$ et$f(x) = f(x')\big)$
2. Il y a 2 racines si le discriminant est différent de 0, et une s'il est nul. Dans le dernier cas on parle de racine double, et en comptant les multiplicités il y a toujours 2 racines.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Chercons un antécédent de α par f. On cherche donc un $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z + \frac{1}{z} = \alpha$. En multipliant par z, on obtient $z^2 - \alpha z + 1 = 0$. C'est une équation du second degré dont le discriminant $\Delta = \alpha^2 - 4$ s'annulle que si $\alpha = \pm 2$. On en déduit que tous les $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{-2, 2\}$ ont deux antécédents, et que 2 et -2 ont un seul antécédent chacun.

   La fonction f est donc surjective mais pas injective. Elle n'est pas bijective.
4. $f(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$. Quand θ varie entre $[0, \pi]$, $f(e^{i\theta})$ va donc prendre toutes les valeurs réelles possibles entre -2 et 2 (puisque $\cos\theta$ prend toutes celles entre -1 et 1). Donc l'image du cercle unité est le segment $[-2, 2]$.
5. $f^{-1}(\{x\})$ est l'ensemble des antécédents de x. Si x est réel, alors les antécédents doivent vérifier $z^2 - xz + 1 = 0$. Le discriminant est $x^2 - 4$.
   - Si $x^2 > 4$, il y a deux racines réelles $\frac{x \pm \sqrt{x^2-4}}{2}$. Et alors

$$f^{-1}(\{x\}) = \left\{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}, \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right\}$$

   - Si $x = \pm 2$, il n'y a qu'une seule racine : 1 si $x = 2$ et -1 si $x = -2$. Et donc

$$f^{-1}(\{-1\}) = \{-1\}, \qquad f^{-1}(\{1\}) = \{1\}.$$

   - Si $x < 2$ il y a deux racines complexes conjuguées $\frac{x \pm i\sqrt{4-x^2}}{2}$. Et alors

$$f^{-1}(\{x\}) = \left\{\frac{x + i\sqrt{4 - x^2}}{2}, \frac{x - i\sqrt{4 - x^2}}{2}\right\}$$

   On peut remarquer que dans ce dernier cas, les deux racines sont bien sur le cercle unité, car $\frac{x^2 + \sqrt{4-x^2}^2}{4} = 1$.

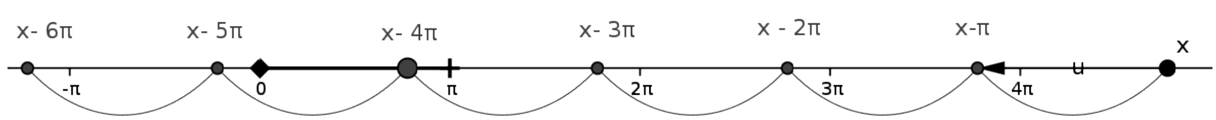
Exercice 6 Relation d'équivalence (5 points)

1. Soient x, y, z trois réels.
   on a toujours $x = x + 0\pi$, donc la relation est réflexive.
   Si $x - y = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $y - x = (-k)\pi$, et $-k \in \mathbb{Z}$. Donc la relation est symétrique.
   Si en plus $y - z = k'\pi$, avec $k' \in \mathbb{Z}$, on obtient en additionnant
   $$x - z = (x - y) + (y - z) = (k + k')\pi\,.$$
   Comme $k + k' \in \mathbb{Z}$, on en déduit que x et z sont en relation et donc que la relation est transitive.
   C'est donc bien une relation déquivalence.

2. $Cl(x_0) = \{y \in \mathbb{R} | \exists k \in \mathbb{Z},\ y = x_0 + k\pi\}$. La classe contient tous les réels qu'on obtient en ajoutant un multiple de π à x_0. Ce que l'on peut aussi écrire
   $$Cl(x_0) = \{x + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

3. Si $x_1, x_2 \in Cl(x_0)$, alors $x_1 = x_0 + k_1\pi$ et $x_2 = x_0 + k_2\pi$. S'ils sont distincts, on doit avoir $k_1 \neq k_2$, ce qui implique $|k_1 - k_2| \geq 1$, puisque $k_1 - k_2$ est entier et non nul. Alors
   $$|x_1 - x_2| = |k_1 - k_2|\pi \geq \pi$$

4. Supposons $x \geq 0$. On part de x et on retranche π à chaque fois. On forme ainsi une suite $x, x - \pi, x - 2\pi, \ldots x - n\pi, \ldots)$. Cette suite tends vers $-\infty$ et avance par pas de longueur π. elle est donc obligée de "mettre un pied" dans l'intervalle $[0, \pi[$ qui est de longueur π. Plus précisément, à partir d'un certain les termes de la suite sont négatifs. Notons le premier terme strictement négatif $x - n_0\pi$. alors on sait que $x - (n_0 - 1)\pi = (x - n_0\pi) + \pi < \pi$ mais aussi que $x - (n_0 - 1)\pi \geq 0$ puisque $x - n_0\pi$ est le premier terme strict^{t} négatif de la suite. On a donc $x - (n_0 - 1)\pi \in [0, \pi[$, et comme $x - (n_0 - 1)\pi \in Cl(x_0)$, on a donc montré l'existence.
   Si $x < 0$, on raisonne de la même manière en rajoutant π à chaque fois.

   Pour l'unicité, on peut remarquer que dans la suite utilisée ci-dessus, il ne peut y avoir deux termes consécutifs dans l'intervalle $[0, \pi[$. On peut aussi utiliser la question précédente. En effet, si deux x_1, x_2 appartiennent à $Cl(x_0)$ et à $[0, \pi[$, alors $|x_1 - x_2| < \pi$. Ce qui contredit la conclusion de la question précédente.

5. Si $x \in [0, \pi[$, alors $p(x) = x$. Si $x \in [\pi, 2\pi[$, alors $p(x) = x - \pi$, et ainsi de suite... En fait, si x et y sont en relation, alors $p(x) = p(y)$. Cela implique que la fonction p est périodique de période π : $\forall x \in \mathbb{R},\ p(x + \pi) = p(\pi)$. Pour tracer sont graphe, il suffit donc de répéter le même motif, en le translatant vers la gauche et vers la droite.