

Mathématiques Générales 1

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

On rendra deux copies séparées :

- Copie 1 : Exercices 1, 2 et 3

- Copie 2 : Exercices 4 et 5.

Exercice 1 (4 points). Max, Min, Inf, Sup

Soit A une partie non vide majorée de \mathbb{R} .

1. Donner la définition, s'il existe, du maximum (appelé aussi plus grand élément), noté M , de A .
2. Donner la définition de la borne supérieure, notée S , de A .
3. Écrire à l'aide de quantificateurs la ou les propriétés caractérisant M . Même question pour S .
4. Dans cette question, on suppose que

$$A = \left\{ \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Discuter l'existence du minimum, maximum, borne supérieure et inférieure de A , et les donner dans le cas où ils existent (*Indication : Il y a une suite monotone*).

Exercice 2 (3 points) Suite récurrente.

On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

1. Étudier rapidement la fonction

$$f(x) = \frac{x}{x + 1},$$

et tracer son graphe (*Il peut-être utile pour avoir une idée du comportement du (u_n)*).

2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et est minorée.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente.
4. Quelle est sa limite ?

Exercice 3 (5 points) Décomposition de polynômes.

Soit P le polynôme dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = X^6 - 4X^5 + 5X^4 + 6X^3 - 32X^2 + 40X - 16$$

1. Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$? et les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
2. Effectuer la division euclidienne de P par $D = X^3 + 8$.
3. Donner la décomposition de P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 (3 points) Polynômes.

Dans cet exercice, on suppose que z_1, z_2, z_3 sont trois nombres complexes de module 1 tels que

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1, \quad z_1 z_2 z_3 = 1.$$

1. Quels nombres complexes vérifient $\frac{1}{z} = \bar{z}$?
2. Utiliser la question précédente pour calculer

$$\frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{z_1 z_2 z_3}.$$

3. Soit P le polynôme $P = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$. Écrire sa forme développée.
4. En déduire l'ensemble $\{z_1, z_2, z_3\}$.

Exercice 5 (6 points) Géométrie dans l'espace.

On considère les points de \mathbb{R}^3 suivants : $A(1, 1, 1)$, $B(2, -3, 1)$, $C(1, 5, 4)$ et $D(-1, 3, 0)$.

Soit :

- Δ la droite passant par A et B .
- P_1 le plan contenant A, B et C .
- P_2 le plan contenant A, B et D .

1. Donner une paramétrisation de Δ .
2. Donner une équation cartésienne de P_1 . Même question pour P_2 .
3. En déduire des équations cartésiennes de Δ .
4. Donner une paramétrisation de P_1 .
5. (a) Soit M un point de \mathbb{R}^3 , et E un point de la droite (AB) . Montrer que $\overrightarrow{ME} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$.
(b) En déduire que la distance d de M à la droite Δ est $d = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.
(c) Calculer la distance de C à la droite Δ .