Université de Provence	2009–2010

Mathématiques Générales 1

Licence PEIP

DEVOIR SURVEILLÉ N°5

Exercice 1 *Groupes* (2 pts)

1. Montrer que l'intersection de deux sous groupes d'un groupe $(G, *)$ est un sous groupe de G.
2. L'union de deux sous groupes est-elle un sous groupe ? (on pensera à vérifier avec $2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$)

Exercice 2 *Complexes* (1 pt)

Soient a, b, c, d quatre nombres réels. En considérant les nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = c + id$, montrez qu'il existe deux nombres réels A et B tels que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = A^2 + B^2.$$

Exercice 3 *Polynômes* (3pts)

Soit le polynôme $P = X^6 + 5X^4 + 4X^2$. Quelle est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$? dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 4 *Dénombrement* (3 pts)

Dans un jeu de 32 cartes, combien de mains de 5 cartes peut-on obtenir contenant :

1. exactement 3 as ?
2. au moins 2 as ?
3. l'as de cœur et au moins deux autres as ?

Exercice 5 *Fonctions trigonométriques et hyperboliques* (4 pts)

1. Rappeler les domaines de définition et les dérivées des fonctions arccos et arctan
2. Montrer que pour tout x dans $[-1, 1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
3. Exprimer $\operatorname{th}(a + b)$ en fonction de $\operatorname{th}(a)$ et $\operatorname{th}(b)$. Calculer $\operatorname{th}(4x)$ en fonction de $\operatorname{th}(x)$

Exercice 6 *Equations différentielles* (4 pts)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E.D.) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $(E.D.)$.
2. Trouver une solution particulière de $(E.D.)$ lorsque $d(x) = e^{-2x}$ (sous la forme ae^{-2x}) et lorsque $d(x) = e^{2x}$ (sous la forme $(ax^2 + bx + c)e^{2x}$) respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de $(E.D)$ lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

Exercice 7 *Suites* (6 pts)

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$.
2. Montrez que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ ont même limite. Que peut-on en déduire ?

   On se propose de calculer la limite commune des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.
3. Montrez qu'il existe un unique $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $a = b \cos \alpha$.
4. Montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = b \sin \alpha \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}, \qquad b_n = \frac{b \sin \alpha}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}.$$

   En déduire la limite commune des deux suites (On rappelle que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).