Université de Provence	2010–2011

Mathématiques Générales 1

Devoir surveillé n° 5

Exercice 1 Equations différentielles (3 points)

1. Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y' + xy = 3x^3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$
2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = cos(x)$ (on cherchera la solution particulière sous la forme $A\sin(x) + B\cos(x)$ où A et B sont deux réels). Quelle solution satisfait $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$?

Exercice 2 Suites (3 points)

Soit a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ v_0 &= b \\ u_{n+1} &= \frac{3u_n+v_n}{4}, \ \text{pour}\, n \in \mathbb{N} \\ v_{n+1} &= \frac{u_n+3v_n}{4}, \ \text{pour}\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$.
2. Montrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite $v_n - u_n$ est une suite géométrique et exprimer $v_n - u_n$ en fonction de n, a et b.
4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On notera l leur limite commune.
5. Démontrer que la suite $u_n + v_n$ est constante. En déduire une expression de l en fonction de a et b.

Exercice 3 Géométrie (3,5 points)

Soient a, b, c, d quatre nombres complexes deux à deux distincts. On note A, B, C et D les quatre points du plan d'affixes respectifs a, b, c et d.

1. On construit le triangle $A'BA$ isocèle rectangle en A', c'est-à-dire tel que $A'B = A'A$ et tel que $(\widehat{\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'A}}) = +\pi/2$. Montrer que
$$a' = \frac{1+i}{2}(a - ib).$$
2. On construit de même les triangles $B'CB$, $C'DC$ et $D'AD$ isocèles rectangles respectivement en B', C' et D' et tels que $(\widehat{\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'B}}) = (\widehat{\overrightarrow{C'D}, \overrightarrow{C'C}}) = (\widehat{\overrightarrow{D'A}, \overrightarrow{D'D}}) = +\pi/2$. Faites le dessin pour les valeurs $a = 0, b = 2, c = 3+i, d = 1+2i$.
3. Exprimer (dans le cas général) b' en fonction de b et c, c' en fonction de c et d et d' en fonction de a et d.
4. Calculer $a' - c'$ et $b' - d'$. En déduire que $A'C' = B'D'$ et que les droites $(A'C')$ et $(B'D')$ sont orthogonales.

Exercice 4 Géométrie (4,5 points)

On considère le plan P d'équation cartésienne $x + 2y + z - 4 = 0$ et la droite d'équation paramétrique

$$D \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

1. Donner un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à P et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D. Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$. Que peut-on en conclure sur P et D ?
2. Retrouver le résultat précédent en cherchant l'intersection entre D et P.
3. Montrer que le point A de coordonnées $(-1, -1, 5)$ appartient à D.
4. Calculer le produit vectoriel de $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$. En déduire l'équation cartésienne du plan perpendiculaire à P et contenant D.

Exercice 5 Applications et fonctions usuelles (5 points)

1. On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^2 - 1$. Faites le graphe de la fonction f. La fonction f est-elle injective ? surjective ? Justifiez votre réponse. Donner un intervalle de départ et un intervalle d'arrivée pour lesquels f est bijective ?
2. Déterminez les ensembles $f([1, 2])$, $f([-0.5, 1])$, $f^{-1}([-1, 1])$, $f^{-1}([1, 7])$
3. Etudiez la fonction $g(x) = arccos(2x^2 - 1)$.

Exercice 6 Polynômes (6 points)

1. Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ le polynôme $X^5 - 1$ (on ne cherchera pas à exprimer autrement les cosinus qui peuvent intervenir, c'est le but de l'exercice).
2. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et on définit l'ensemble $\mathbb{U}_5 = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$. Dessinez l'ensemble $\mathbb{U}_5$ dans le plan complexe. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathbb{U}_5$ muni de la multiplication des complexes (on écrira la table de multiplication de cet ensemble et on justifiera la réponse) ?
3. Que vaut $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$?
4. On pose $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.
   (a) Calculer la somme $\alpha + \beta$ et le produit $\alpha\beta$. En déduire un polynôme de degré 2 dont les racines sont α et β.
   (b) Montrer que α est un réel positif et β un réel négatif.
   (c) En déduire les valeurs de α et β.
5. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Les utiliser pour donner la factorisation explicite de $X^5 - 1$ sur $\mathbb{R}$. Vérifier que votre résultat est juste en développant votre forme factorisée.