Introduction à l'Analyse

DEVOIR SURVEILLÉ BLANC NO 1.

Exercice 1 Rappeler la définition de la fonction arc tan. Donner l'allure de son graphe et calculez sa dérivée sur son domaine de définition.

Exercice 2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = -3 \cos 2x$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
On pourra rechercher une solution particulière de cette équation de la forme $A \cos 2x + B \sin 2x$.

Exercice 3 1. Montrez que pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 \leq \ln u_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et vaut $\sqrt{e}$.

Exercice 4 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 4x = \cos x$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 4x = -\sin x$.

3. Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $\cos 4x = -\sin x$.

Exercice 5 1. On pose $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$.

Etudier la fonction f et donner une allure de son graphe.

2. On pose $g(x) = \arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$.

Sur quel domaine de $\mathbb{R}$, g est-elle continue et dérivable ?

Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

3. Que vaut, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan x + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) \quad ?$$

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. On rappelle que

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et que} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On pose

$$C_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch} kx \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh} kx.$$

Calculer $C_n + S_n$ et $C_n - S_n$.

En déduire les valeurs de C_n et S_n .

Exercice 7 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\sin x$.

2. On pose

$$a = \arcsin \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Que vaut $\cos(4a)$?

En utilisant l'exercice 4, calculez a .