

Introduction à l'Analyse

DEVOIR SURVEILLÉ BLANC NO 2 DU 13 NOVEMBRE 2012 (3H)

Exercice 1 Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 5y = (\cos x + 2 \sin x)e^x$$

avec $y(0) = y'(0) = 0$. On pourra rechercher une solution particulière de la forme

$$y(x) = (A \cos x + B \sin x)e^x.$$

Exercice 2 *Extrait du sujet des CCP (2009).*Montrez que, pour tout $x > 0$:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Indication : on pourra dériver.

Exercice 3 *Extrait du sujet des CCP (2010).*

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation :

$$(E) : \arctan x + \arctan(x^3) = \frac{3\pi}{4}.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan x + \arctan(x^3)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f' .
2. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
3. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution réelle α .
4. Démontrer que pour tout réel $x \notin \{-1, 1\}$, on a :

$$\frac{x + x^3}{1 - x^4} = \frac{x}{1 - x^2}.$$

Puis résoudre l'équation :

$$\frac{x + x^3}{1 - x^4} = -1.$$

5. Simplifier l'expression $\tan(\arctan \alpha + \arctan(\alpha^3))$ à l'aide de la formule de duplication pour $\tan$. En déduire une valeur exacte de α .

Exercice 4 *D'après un exercice extrait du sujet des CCP (2011).*

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$(E) : xy' + y = \cos x.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrez que, pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

2. Montrez que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - 1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - 1}{x}$$

existent et les calculer.

3. Montrez que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Soit x un réel non nul. Calculer $xf'(x) + f(x)$. Que peut-on en déduire ?

5. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

6. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *Extrait du sujet des CCP (2006).*

On note (E) l'équation différentielle $|x|y' + (x - 1)y = x^2$.

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.

2. Sachant que les solutions de (E) sur $] -\infty, 0[$ sont les fonctions $x \mapsto x + 2 + \frac{2}{x} + B\frac{e^x}{x}$, où $B \in \mathbb{R}$, existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$? Si oui, les expliciter.

Exercice 6 *Extrait du sujet des CCP (2007).*

On définit les "polynômes de Tchebychev".

Pour tout entier naturel n , on définit sur $[-1, 1]$ la fonction T_n par $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Indication : on pourra calculer $T_{n+2}(x) + T_n(x)$.

2. Calculer T_0, T_1, T_2, T_3 .

3. Justifier que T_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

4. Montrer que la fonction polynomiale T_n admet n racines distinctes que l'on précisera.