Université de Provence	2012–2013

Introduction à l'Analyse

DEVOIR SURVEILLÉ BLANC NO 3 DU 29 NOVEMBRE 2012 (2H)

Extrait du sujet de concours CCP-2012 : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 Montrer que si une suite de réels converge, sa limite est unique.

Exercice 2 Montrer que toute suite de nombres complexes convergente est bornée.

Exercice 3 Soit $(u_n)_n$ une suite de réels convergeant vers 1. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 4 1. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}^+$. On définit l'ensemble AB en posant $AB = \{ab,\ a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrez que AB est majoré et que $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup B$.

2. Soient $A = [-3, -1[$ et $B = [1, 4]$. Déterminer $\sup(A)$ et $\sup(B)$. Déterminer l'ensemble AB puis calculer $\sup(AB)$. Conclure.

Exercice 5 On cherche les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de léquation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(-x). \tag{E}$$

1. Montrer que la fonction $x \to \cos x + \sin x$ est solution de (E).

2. Trouver une équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants satisfaite par les solutions de (E).

3. Résoudre cette équation.

4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 6 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'(x) \text{ ch } x + y(x) \text{ sh } x = \frac{1}{1+x^2}$$

avec $y(0) = 0$. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R},$ ch $x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et sh $x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Exercice 7 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$.

2. Montrez que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ ont même limite. Que peut-on en déduire ?

   On se propose de calculer la limite commune des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

3. Montrez qu'il existe un unique $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $a = b\cos\alpha$.

4. Montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = b\sin\alpha \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}, \qquad b_n = \frac{b\sin\alpha}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}.$$

   En déduire la limite commune des deux suites (On rappelle que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).