Devoir n^{0}1

à renvoyer au plus tard le 18 mars 2006

à : Stéphane Rigat, CMI, 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 MARSEILLE Cedex 13.

Exercice 1.

1. Est-ce que la fonction $\dfrac{\sin x}{x}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$? Montrez que la limite de $\displaystyle\int_A^B \frac{\sin x}{x} dx$ existe quand A tend vers $-\infty$ et B tend vers $+\infty$. On notera $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ cette limite.

2. Vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^n dx \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x\, dt.$$

Pour tout $t \geq 0$, on pose $F_n(t) = \displaystyle\int_0^n e^{-xt} \sin x\, dx$. Calculer $F_n(t)$ et déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(t).$$

En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi.$$

3. Soit $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{x}$. Montrez que f_n définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx + \pi\varphi(0).$$

En déduire la limite de f_n au sens des distributions quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.

1. Rappeler la définition du produit d'une fonction f de classe C^∞ avec une distribution T.

2. Montrer qu'on ne peut pas étendre ce produit en un produit sur l'espace des distributions qui soit commutatif et associatif. On pourra par exemple, supposer qu'un tel produit existe et calculer de deux manières différentes le produit $x\, \delta_0\, \mathrm{vp}\left[\dfrac{1}{x}\right]$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$.

1. Calculez $(x^2T)'$.

2. Trouvez toutes les solutions de l'équation

$$x^2T' + 2xT = 0.$$

Exercice 4. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support compact, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans le compact K.

1.a. Montrer que T définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R}), \qquad \langle T, \varphi \rangle = \int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \ln a$$

définit bien une distribution, et en particulier que si $a' \geq a$, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R}), \qquad \langle T, \varphi \rangle = \int_0^{a'} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \ln a'$$

Quels sont son ordre ? son support ?

1.b. Calculer xT'.

1.c. Déterminer une primitive de T (intégrer par parties)

2.a. Trouver une distribution S dans $\mathcal{D}'^+$ (espace des distributions dont le support est inclus dans $[0, +\infty[$) telle que

$$xS' + S = \delta_0. \tag{E}$$

2.b. Quelle est la solution générale de (E) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{D}'^+$?