Devoir n$^0$2

À renvoyer au plus tard le 19 mai 2006

à : Stéphane Rigat, CMI, 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 MARSEILLE Cedex 13.

*Ce texte a été composé à partir des textes des sujets d'examens de juin et septembre 2005.*

## Exercice.

Soit $n \geq 2$, $\mathbb{S}_n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, $d\sigma_n$ l'élément de surface sur $\mathbb{S}_n$, $\mathbb{B}_n$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $\omega_n = \sigma_n(\mathbb{S}_n)$.

**1.** Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{S}_n$. Montrez que la solution $u$ du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{B}_n \\ u = f & \text{sur } \mathbb{S}_n \end{cases}$$

est donnée par

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}_n} f(\zeta) \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \zeta\|^n} d\sigma_n(\zeta).$$

On appelle *opérateur de Poisson* l'opérateur qui à une fonction $f$ continue sur $\mathbb{S}_n$ associe la fonction $P[f]$ donnée par

$$P[f](x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}_n} f(\zeta) \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \zeta\|^n} d\sigma_n(\zeta).$$

**2.** Montrez que si une fonction $f$ est harmonique dans la boule unité alors,

$$\forall x \in \mathbb{B}_n, \qquad f(x) = P[f_{|\mathbb{S}_n}](x).$$

On se propose de montrer que si $f$ est un polynôme sur $\mathbb{R}^n$, alors $P[f_{|\mathbb{S}_n}]$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à celui de $f$.

**3.** Soit $f$ un polynôme de degré $m$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrez que, si $m = 0$ ou $m = 1$, alors $P[f_{|\mathbb{S}_n}] = f$. (indication : remarquez que tout polynôme de degré 0 ou 1 est harmonique).

**4.** On se propose de montrer que, si $f$ est un polynôme de degré $m \geq 2$, alors il existe un polynôme $g$ de degré $m - 2$ tel que

$$P[f_{|\mathbb{S}_n}] = (1 - \|x\|^2)g + f.$$

**4.1.** Montrer qu'il suffit de prouver qu'il existe un polynôme $g$ de degré inférieur ou égal à $m - 2$ tel que

$$\Delta((1 - \|x\|^2)g) = -\Delta f.$$

**4.2.** On note $E$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}^n$ de degré inférieur ou égal à $m - 2$. On note $T : E \to E$ qui à $h \in E$ associe

$$\Delta((1 - \|x\|^2)h).$$

En utilisant le principe du maximum, montrez que $T$ est injective.

**4.3.** Conclure.

**5.** Montrez qu'il n'existe pas de polynôme $f$ tel que $\|x\|^2 f$ soit harmonique (indication : sinon, montrez qu'on aurait $P[f_{|\mathbb{S}_n}] = \|x\|^2 f$).

**6.** Montrez que si $f$ est un polynôme tel que $f_{|\mathbb{S}_n} = 0$ alors il existe un polynôme $g$ tel que $f = (\|x\|^2 - 1)g$.

## Exercice.

Résoudre l'équation aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$ d'inconnue $u$ vérifiant

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sachant que $u(1, y) = h(y)$ où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

## PROBLEME.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$P(D) = \sum_{|J| \leq m} a_J \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}$$

un opérateur linaire  coefficients constants d'ordre $m$, où

$$J = (j_1, \dots, j_n), \quad |J| = j_1 + \cdots + j_n \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} = \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}.$$

On considère un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de classe $C^\infty$ à support compact dans $\Omega$. $L^2(\Omega)$ désigne l'espace de Hilbert des classes de fonctions mesurables à valeurs complexes et dont le carré du module est intégrable pour la mesure de Lebesgue dans $\Omega$. Les normes et produits scalaires dans $L^2(\Omega)$ seront notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$. On a

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u \bar{v} \, d\lambda \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = \int_\Omega |u|^2 \, d\lambda$$

où $d\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

## Question préliminaire

Soit $P(D) = \sum a_J \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}$ et $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Montrez que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est solution de

$$P(D)u = g$$

au sens des distributions si et seulement si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle u, P^*(D)\varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$$

où $$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} \, d\lambda \quad \text{et} \quad P^*(D) = \sum (-1)^{|J|} \overline{a_J} \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}.$$

## Partie I : Inégalité de Hörmander.

Soit $P(D)$ un opérateur linéaire à coefficients constants d'ordre $m$. On se propose de montrer que, si $\Omega$ est un ouvert <u>borné</u> de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \|P(D)\varphi\| \geq C\|\varphi\| \tag{1}$$

**1.** Supposons $n = 1$, $\Omega = ]0, 1[$ et $P(D) = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Montrez que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle (x\varphi)', \varphi \rangle = \langle x\varphi', \varphi \rangle + \langle \varphi, \varphi \rangle \quad \text{et} \quad \langle \varphi, \varphi \rangle = -\langle x\varphi', \varphi \rangle - \langle x\varphi, \varphi' \rangle.$$

En déduire que $\|\varphi\|^2 \leq 2\|\varphi'\|\|\varphi\|$, puis (1) dans ce cas particulier.

**2.** Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit $P_j(D)$ par

$$P_j(D)\varphi = P(D)(x_j\varphi) - x_jP(D)\varphi. \tag{2}$$

Montrez que $P_j(D)$ est soit nul, soit d'ordre inférieur ou égal à $m-1$. (on montrera qu'on peut se ramener au cas o $j = 1$ et $P(D) = \frac{\partial}{\partial x^J}$)

**3.** Soit $A = \sup_{x\in\Omega} |x|$ ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$). On se propose de montrer par récurrence sur $m \geq 0$ la propriété $\mathcal{P}(m)$ suivante :

$\mathcal{P}(m) =$“ Pour tout opérateur $P(D)$ linéaire à coefficients constants d'ordre inférieur ou égal à $m$, si $P_j(D)$ désigne l'opérateur défini par (2), alors on a :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P_j(D)\varphi\| \leq 2mA\|P(D)\varphi\|\text{”} \tag{3}$$

- **a.** Montrez que $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour $m = 0$.
- **b.** Montrez que, si $\mathcal{P}(m)$ est vraie, alors, pour tout opérateur $P(D)$ d'ordre inférieur ou égal à $m$, on a :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P(D)(x_j\varphi)\| \leq (2m+1)A\|P(D)\varphi\|$$

- **c.** Montrez que $\qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P(D)\varphi\|^2 = \|P^*(D)\varphi\|^2.$

  (on pourra utiliser le fait que des oprateurs  coefficients constants commutent entre eux).
- **d.** Soit $m \geq 1$. On suppose que $\mathcal{P}(m-1)$ est vraie. Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre $m$.
  - **i.** Montrez que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle P(D)(x_j\varphi), P_j(D)\varphi\rangle = \langle x_jP(D)\varphi, P_j(D)\varphi\rangle + \|P_j(D)\varphi\|^2$$

  - **ii.** Montrez que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle P(D)(x_j\varphi), P_j(D)\varphi\rangle = \langle P_j^*(D)(x_j\varphi), P^*(D)\varphi\rangle$$

  - **iii.** Montrez que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|P_j(D)\varphi\|^2 = \langle P_j^*(D)(x_j\varphi), P^*(D)\varphi\rangle - \langle x_jP(D)\varphi, P_j(D)\varphi\rangle.$$

**iv.** En utilisant 3.b, 3.c et l'hypothèse de récurrence, montrez que

$$\|P_j^*(D)(x_j\varphi)\| \leq (2m-1)A\|P_j(D)\varphi\|$$

**v.** Montrez que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$|\langle x_j P(D)\varphi, P_j(D)\varphi\rangle| \leq A\|P(D)\varphi\|\|P_j(D)\varphi\|,$$

puis que $\|P_j(D)\varphi\| \leq 2mA\|P(D)\varphi\|$. Conclure.

**4.** Montrez que (1) est vérifiée (on raisonnera par récurrence sur l'ordre de $P$).

## Partie II.

On se propose de montrer que, si $\Omega$ est borné dans $\mathbb{R}^n$ et $g \in L^2(\Omega)$, alors il existe $u \in L^2(\Omega)$ solution de

$$P(D)u = g$$

au sens des distributions avec $\|u\| \leq \frac{1}{C}\|g\|$, où $C$ est la constante introduite dans la partie I.

**1.** Montrez que $\qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P^*(D)\varphi\| \geq C\|\varphi\|.$

**2.** Soit $E = \{\psi = P^*(D)\varphi \ / \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$. En utilisant la question précédente, montrez que l'application $E \ni \psi \mapsto \langle g, \varphi\rangle$ est bien définie et que c'est une forme semi-linéaire continue pour la norme $L^2$. (rappel : si $E$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel et $f : E \to \mathbb{C}$ une application, on dit que $f$ est semi-linaire si et seulement si $\bar{f} : E \ni x \mapsto \overline{f(x)}$ est linaire).

**3.** Montrez qu'il existe $u \in \overline{E}$ (adhérence de $E$ pour la norme $L^2$) tel que

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \langle g, \varphi\rangle = \langle u, P^*(D)\varphi\rangle.$$

**4.** Conclure.