REMARQUE IMPORTANTE : En raison de la brièveté du délai imparti pour le devoir 1 et afin de ne pas pénaliser les étudiants étrangers qui reçoivent les documents tardivement, j'ai décidé de reculer les dates limites d'envoi à la correction des devoirs 1 et 2 au 15 mai 2005. Les corrigés de ces devoirs ne seront donc pas joints aux envois courants (contenant les cours et les corrigés des exercices). Ils seront transmis aux étudiants (qui m'auront rendu les devoirs) en même temps que leur copie corrigée. Ceux qui ne comptent pas rendre l'un ou l'autre des deux devoirs pourront néanmoins obtenir un corrigé sur simple demande (n'oubliez pas de joindre à votre demande votre adresse E.mail ou votre adresse postale...)

Devoir n^{0}2

À renvoyer au plus tard le 15 mai 2005

à : Stéphane Rigat, CMI, 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 MARSEILLE Cedex 13.

Exercice 1. Faire l'exercice 3.4.

Exercice 2. Faire l'exercice 3.13.

Exercice 3. Faire l'exercice 3.23.

Exercice 4. Soit $I =]0,1[$, $p \in C^1(\bar{I}), q \in C(\bar{I})$ et $f \in C(\overline{I})$. On suppose que, pour tout $x \in \bar{I}$, $p(x) > 0$ et $q(x) \geq 0$. On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

1. Montrez que si u est une solution classique de ce problème, alors

$$\forall v \in H_0^1(I), \qquad \int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv,$$

2. Montrez que la forme

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I quv$$

est bilinéaire, continue et coercive.

3. En déduire l'existence d'une unique solution faible u.
4. Montrez que $pu' \in H^1$, puis que $u' \in H^1$. En déduire que $u \in C^2(\bar{I})$ et que u est une solution classique.

Exercice 5. Montrez que, pour $N > 1$ la fonction $u = \log\log\left(1 + \frac{1}{\|x\|}\right)$ est dans $W^{1,N}(\mathbb{B}_N)$. (Attention à être très soigneux !)

Exercice 6. Si $u \in H^2(\Omega)$, on note

$$\|D^2u\|^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2.$$

Intégrez par parties pour prouver, si $u \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \leq C\left(\int_\Omega u^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \|D^2u\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrez cette inégalité pour $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.