Université d'Aix-Marseille 2012–2013

Introduction à l'analyse

Devoir à rendre pour le mardi 9 octobre

1. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 10^x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est bijective. En écrivant que $f(x) = \exp(x \ln 10)$, expliciter f^{-1} que l'on note log.

2. Pour tout réel x, on note $E(x)$ ou encore $[x]$ et on appelle "partie entière" de x le plus grand entier relatif n tel que $n \leq x$.

Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $[x] \leq x < [x] + 1$.

Calculer $[\pi], [\sqrt{2}], [-\pi]$.

Etudiez la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto [x] \in \mathbb{Z}$ et tracer son graphe. Cette fonction est-elle continue ? continue à droite ? continue à gauche ? Sur quel ensemble est-elle dérivable ?

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $(u_n)_n$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{[nx]}{n}.$$

Montrez que la suite $(u_n)_n$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers x.

4. Si n est un entier naturel et $C(n)$ désigne le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n, exprimer $C(n)$ en fonction de $\log n$ et de la partie entière.

5. Application numérique : calculer le nombre de chiffres de $9^{(9^9)}$. Supposons que vous écriviez ce nombre au rythme de deux chiffres par seconde, combien de temps vous faudra-t'il (en années, jours, heures, minutes et secondes) pour l'écrire en totalité ? On supposera pour simplifier que les années ont 365 jours.