

Introduction à l'analyse

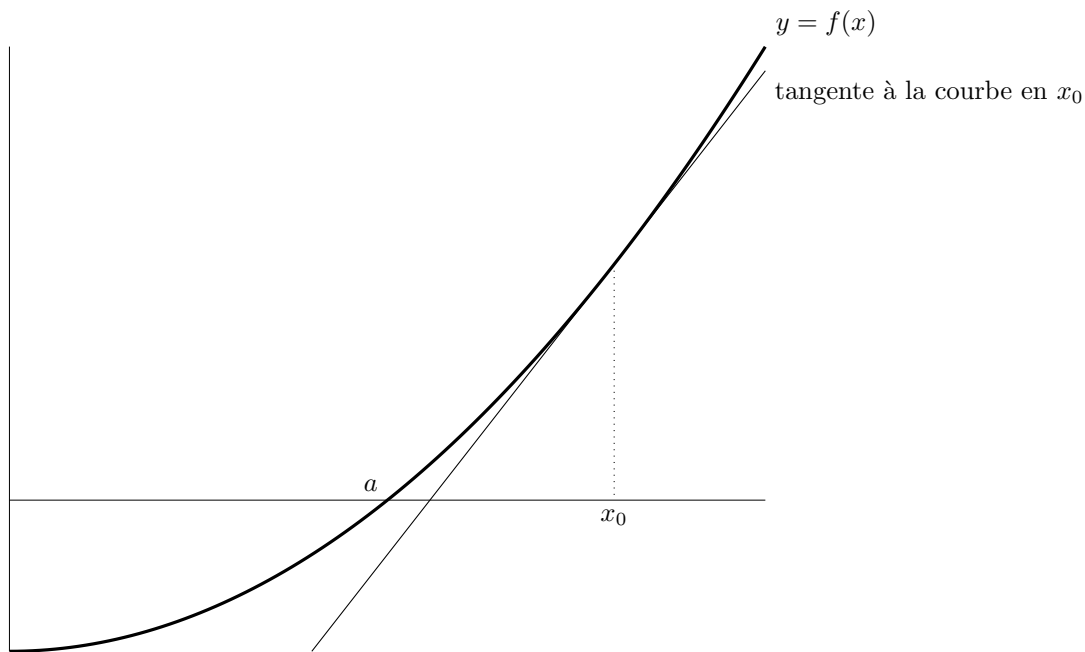
DEVOIR À RENDRE POUR LE MARDI 11 DÉCEMBRE

LA MÉTHODE DE NEWTON POUR RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS.

On se propose dans ce problème d'étudier une méthode pour trouver des valeurs approchées des solutions d'une équation. Cette méthode, inventée par Isaac Newton (1643-1727) est la suivante.

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ où f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que la solution de $f(x) = 0$ dans I est a et que la dérivée f' de f ne s'annule pas dans I .

On suppose que $x_0 \in I$ est une approximation "pas trop mauvaise" de la solution a . L'idée est de dire que, si l'on considère la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$ et si x_1 désigne l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses, la valeur x_1 sera alors une meilleure approximation que x_0 de la solution a .



L'algorithme sera alors le suivant : on recommence alors la procédure en partant non plus du point x_0 , mais du point x_1 . On obtient alors un point x_2 , et on poursuit le processus.

Montrez que la suite $(x_n)_n$ ainsi construite est définie par la donnée de $x_0 \in I$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Bien entendu, il n'est pas évident que la suite ainsi construite converge effectivement vers une solution de $f(x) = 0$. L'objectif de la suite du problème est d'étudier, dans un cas très particulier, ce phénomène.

UN EXEMPLE D'APPLICATION : L'ALGORITHME DE BABYLONE.

On se propose de calculer des valeurs numériques de $\sqrt{2}$.

1. En prenant la fonction $f : [1 + \infty[\ni x \mapsto x^2 - 2$, expliciter la suite $(x_n)_n$ donnée par l'algorithme de Newton avec $x_0 = 2$.

2. On se propose de montrer que la suite ainsi construite va effectivement converger vers $\sqrt{2}$.

2. a. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est bien définie.

2. b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{2})^2.$$

2. c. Montrez que la suite $(x_n)_n$ est décroissante.

2. d. Montrez que la suite $(x_n)_n$ est convergente. Quelle est sa limite ?

2. e. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_n - \sqrt{2})^2.$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{\frac{3}{2}(2^n-1)}}(2 - \sqrt{2})^{2^n}.$$

2. f. En utilisant les approximations numériques $\sqrt{2} \geq 1,4$, $1,4^3 \leq 2,75$ et $\frac{0,6}{1,4^3} \leq 0,22$, montrez que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq 2,75 \times (0,22)^{2^n}.$$

Majorer à l'aide de la formule précédente $x_0 - \sqrt{2}$, $x_1 - \sqrt{2}$, $x_2 - \sqrt{2}$, $x_3 - \sqrt{2}$, $x_4 - \sqrt{2}$ et $x_5 - \sqrt{2}$. On donnera les résultats sous la forme $a, b \times 10^{-n}$ où a, b désigne un nombre décimal à un chiffre après la virgule et où la décimale b sera prise par excès.

Calculer x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et regarder (sur la calculatrice) les valeurs de x_1^2, x_2^2 , etc...

Pour quelle valeur de n , votre calculatrice ne fait pas de différence entre x_n^2 et 2 ?

Pour quels $n \in \mathbb{N}$ est-on sûr d'avoir $0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq 10^{-1000}$?