Ecrit Blanc

On considère dans la suite $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$. La norme (euclidienne) de $x = (x_1, \dots, x_n)$ est $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. La métrique sur $\mathbb{R}^n$ est la distance usuelle $d(x, y) = \|x - y\|$.

Si C est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et x un point de $\mathbb{R}^n$, on pose $d_C(x) = \inf_{c \in C} d(x, c)$. La fonction $d_C : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ est donc la fonction distance à C .

Dans ce problème, on se propose d'étudier les fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ qui sont de classe C^1 et qui vérifient :

$$\forall x \in U, \quad \|\nabla f(x)\| = 1$$

où $\nabla f(x)$ est le gradient de f en x défini par

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Si on note $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la différentielle de f en x , on a donc :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad df(x)(v) = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

Question préliminaire.

Montrez que d_C est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $|d_C(x) - d_C(y)| \leq d(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Partie I. Quelques exemples.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Montrez que la fonction $d_a : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$, $x \mapsto d(x, a)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.
2. Soit S un segment compact dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction d_S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus S$. [Indication : Se ramener au cas où $S = [-a, a] \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, avec $a \geq 0$].
3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est partout dérivable sur $]a, b[$ (sans nécessairement supposer que f' soit continue) et que $|f'(t)| = 1$, pour tout $t \in]a, b[$. Montrer que l'on a soit $f(t) = f(a) + (t - a)$, pour tout $t \in [a, b]$, soit $f(t) = f(a) + (a - t)$, pour tout $t \in [a, b]$.

Partie II. Différentiabilité de fonctions distance.

Dans cette partie, on considère une partie C de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $d_C = d_{\bar{C}}$ où $\bar{C}$ est la fermeture de C dans $\mathbb{R}^n$.

Dans la suite de cette partie, on supposera que C est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $c \in C$ tel que $d_C(x) = d(x, c)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $C_x = \{c \in C \mid d(c, x) = d_C(x)\}$.

3. Soit $x_k \in \mathbb{R}^n$ une suite qui converge vers un point $x_\infty \in \mathbb{R}^n$. Si $y_k \in C_{x_k}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que l'on peut extraire de la suite y_k une sous-suite qui converge vers un point $y_\infty \in C_{x_\infty}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction $p_{x,C} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$p_{x,C}(h) = \inf_{c \in C_x} \langle x - c, h \rangle.$$

- a. Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on peut trouver un $c \in C_x$ tel que $p_{x,C}(h) = \langle x - c, h \rangle$.

On note d_C^2 le carré de la fonction réelle d_C , c'est-à-dire $d_C^2(x) = (d_C(x))^2$.

- b. Montrer qu'on a

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad d_C^2(x+h) \leq d_C^2(x) + 2p_{x,C}(h) + \|h\|^2.$$

- c. Montrer que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|d_C^2(x+h) - d_C^2(x) - 2p_{x,C}(h)|}{\|h\|} = 0.$$

[Indication : utiliser les questions 3 et 4.b de la partie II.]

- d. En déduire que d_C^2 est différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si C_x est réduit à un seul point. [Indication : On remarquera que si $p_{x,C}$ est linéaire, on doit avoir $p_{x,C}(-h) = -p_{x,C}(h)$.]
5. Montrer que d_C est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus C$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $c \in C$ tel que $d(x, c) = d_C(x)$.
 6. On suppose que d_C est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus C$. Exprimer $\nabla d_C(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$. En déduire que d_C est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus C$. Que vaut la norme de $\nabla d_C(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$?

Partie III. Etude des fonctions de classe C^2 de gradient unitaire.

1. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arc paramétré de classe C^1 . On rappelle que la longueur $\ell(\gamma)$ de γ est donnée par :

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Montrer que si l'on a $\ell(\gamma) = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$, alors $\gamma([a, b])$ est le segment joignant $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$. [Indication : On supposera $\gamma(a) = 0$ et on écrira $\gamma(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(t)e_i$ avec $\gamma_i(t) \in \mathbb{R}$ et où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ avec $e_1 = \gamma(b)/\|\gamma(b)\|$.]

Dans cette partie, on considère une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est, pour commencer, de classe C^1 , avec $\|\nabla f(x)\| = 1$, pour tout $x \in U$.

2. Montrer que, pour tout arc paramétré $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ de classe C^1 , on a

$$|f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))| \leq \ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

En déduire que la restriction de f à un convexe contenu dans U est 1-lipschitzienne.

Dans la suite de cette partie, on supposera, de plus, que la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et on notera $\mathcal{E}_f$ l'équation différentielle $\gamma'(t) = (\nabla f)(\gamma(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

S'il le désire, le candidat pourra supposer que $n = 2$ et donc que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les arguments sont en fait valable en toute dimension.

3. Montrer que par tout point $x \in U$ passe une solution locale $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow U$, avec $\gamma(0) = x$, de l'équation différentielle $\mathcal{E}_f$.
4. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}_f$. Montrer que $\gamma([a, b])$ est un segment et que l'on a :

$$\forall s \in [a, b], \quad f(\gamma(s)) = f(\gamma(a)) + s - a \quad \text{et} \quad \gamma(s) = \gamma(a) + (s - a)(\nabla f)(\gamma(a)).$$

5. Soit $x \in U$ fixé. On note $]a_x, b_x[$ le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et contenu dans l'ouvert $\{s \in \mathbb{R} \mid x + s\nabla f(x) \in U\}$ de $\mathbb{R}$. montrer que $]a_x, b_x[\rightarrow U$, $s \mapsto x + s\nabla f(x)$ est la solution maximale de $\mathcal{E}_f$, passant par x pour $s = 0$, et que $f(x + s\nabla f(x)) = f(x) + s$ pour tout $s \in]a_x, b_x[$.

6. Première application.

- a. Soient $v, x \in \mathbb{R}^n$ avec $\|v\| = 1$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall s \geq 0, d(y, x + sv) \geq s$, montrer que l'on a $\langle y - x, v \rangle \leq 0$.

- b. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et telle que $\|\nabla f(x)\| = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est affine. [Indication : on montrera que, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(y) = f(x)$, on a $d(y, x + s\nabla f(x)) \geq |s|$.]

7. **Seconde application.** Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un fermé. On suppose que d_C est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n \setminus C$. Montrer que C est convexe. [Indication : on cherchera à exprimer C comme une intersection de demi-espaces affines].

Partie IV. Etude des fonctions de classe C^1 de gradient unitaire.

Dans la partie précédente, on a essentiellement obtenu des résultats pour des fonctions de classe C^2 . Cette partie montre comment obtenir les mêmes résultats pour des fonctions qui ne sont que de classe C^1 .

Dans la suite, on considère une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est de classe C^1 avec $\|\nabla f(x)\| = 1$, pour tout $x \in U$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \geq 0$, on note $\bar{B}(x, r)$ la boule euclidienne fermée $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y-x\| \leq r\}$.

Si $\bar{B}(x, r) \subset U$, on pose

$$\theta(x, r) = \sup_{\|v\|=r} f(x+v) - f(x)$$

Dans ce cas, si $r' \leq r$, la quantité $\theta(x, r')$ est aussi définie.

Dans la suite, on supposera que $\bar{B}(x, r) \subset U$ avec $r > 0$.

1. Montrer que $\theta(x, r) \leq r$. Pour $r' \rightarrow 0$, montrer que $\theta(x, r')/r'$ admet une limite que l'on déterminera.
2. Montrer que, pour tout $y \in \bar{B}(x, r)$, on a $f(y) - f(x) \leq \theta(x, r)$. En déduire que $\theta(x, r) > 0$.
3.
 - a. Si $\|w\| = r/2$, montrer que $f(x+w) - f(x) + \theta(x+w, r/2) \leq \theta(x, r)$.
 - b. En déduire qu'il existe $x_1 \in \bar{B}(x, r/2)$ tel que $\theta(x_1, r/2) \leq \theta(x, r)/2$.
4.
 - a. Construire par récurrence une suite $x_k \in \bar{B}(x, r)$ telle que $\theta(x_{k+1}, r/2^{k+1}) \leq \theta(x_k, r/2^k)/2$.
 - b. Montrer que $\theta(x, r) = r$.
5. Montrer qu'il existe $w \in \mathbb{R}^n$, dépendant de r , avec $\|w\| = 1$ et $f(x+rw) = f(x) + r$. En déduire que $(\nabla f)(x+tw) = w$ pour $t \in [0, r]$.
6. Si $x \in U$ et $]a_x, b_x[$ est le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et contenu dans l'ouvert $\{s \in \mathbb{R} \mid x + s(\nabla f)(x) \in U\}$ de $\mathbb{R}$, montrer que $f(x + s\nabla f(x)) = f(x) + s$ pour tout $s \in]a_x, b_x[$.
7. Montrer que le résultat de la question 6.b de la partie III reste encore valable si on suppose que f est seulement de classe C^1 .
8. **Théorème de Motzkin.** Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un fermé. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) Le fermé C est convexe.
 - (ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $c \in C$ tel que $d_C(x) = d(x, c)$.
 - (iii) La fonction d_C est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus C$.

Fin du problème.