Université Aix-Marseille I | **Centre de Télé-enseignement**
Licence de Mathématiques | **Analyse et Topologie**

Examen de septembre 2003 : 2LMTT1
Documents, Calculatrices, Portables interdits.
Durée : 3h

Questions de cours.

1. Soit (E,d) un espace métrique. Rappelez la définition d'une suite convergente, d'une suite de Cauchy, d'une suite bornée. Montrez que toute suite convergente est de Cauchy, que toute suite de Cauchy est bornée et que toute suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence est une suite convergente.

2. Soit (E,d) un espace métrique, A une partie de E et $a \in E$. On rappelle que $a \in \overline{A}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, où $B(a,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte de centre a et de rayon ε. Montrez que $a \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a.

3. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f \in L(E,F)$ une application linéaire. Montrez que f est continue si et seulement si f est bornée sur la boule unité de E.

Exercice 1. On rappelle qu'un sous-ensemble C d'un espace vectoriel normé E est *convexe* si et seulement, pour tous $x, y \in C$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$.

1. Un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ est-il connexe par arcs ? connexe ? (on munit $\mathbb{R}^n$ d'une topologie associée à une distance, elle-même associée à une norme quelconque).

2. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est-il convexe ? connexe par arcs ? connexe ?

3. L'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est-il convexe ? connexe par arcs ? connexe ?

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, K une partie compacte de E et $f : K \to K$ une application telle que

$$\forall (x,y) \in K^2, \qquad \|f(x) - f(y) - (x-y)\|^2 \leq \|x-y\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2. \qquad (*)$$

1. Vérifier que pour tout $(u,v) \in E^2$, on a

$$|\, \|u\| - \|v\| \,| \leq \|u - v\|.$$

2. En déduire que

$$\forall (x,y) \in K^2, \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|.$$

3. Montrer que f est continue.

Soit (x_n) la suite de points de K définie par la donnée d'un $x_0 \in K$ et par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, pour tout $n \geq 0$. Dans la suite de l'exercice, on suppose que f possède au moins un point fixe ; soit a l'un quelconque de ces points, c'est-à-dire que a est un élément de K tel que $a = f(a)$.

4. Montrer que la suite $(u_n(a))_n$ définie par $u_n(a) = \|x_n - a\|$ est convergente pour tout point fixe a de f.

5. En déduire, en utilisant $(*)$ que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

6. **a.** Justifier le fait que la suite (x_n) possède une valeur d'adhérence.

b. Montrer que si $(x_{\varphi(n)})_n$ est une sous-suite de (x_n) qui converge vers α, alors $(x_{\varphi(n)+1})_n$ est aussi une sous-suite convergeant vers α.

c. Montrer que toute valeur d'adhérence de (x_n) est un point fixe de f.

7. En considérant la suite $(u_n(\alpha))_n$, montrer que la suite (x_n) converge vers un point fixe de f.