

EXAMEN DE SEPTEMBRE 2004 : 2LMTT1  
Documents, Calculatrices, Portables interdits.  
Durée : 3h

**Questions de cours.**

1. Montrez que, si  $E$  est un espace normé et  $F$  un espace de Banach, alors l'espace  $\mathcal{L}(E, F)$  des fonctions linéaires continues de  $E$  dans  $F$  muni de la norme associée aux normes de  $E$  et  $F$  est un espace de Banach.
2. Montrez qu'un espace compact est complet.
3. Montrez que, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
4. Montrez que l'image d'un connexe par une application continue est un connexe.
5. Énoncez et démontrez le théorème de dérivation de la fonction limite d'une suite de fonctions.

**Exercice.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique, et  $f : (E, d) \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est semi-continue supérieurement si et seulement si pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\{x \in E, f(x) < \alpha\}$$

est un ouvert de  $E$ .

On dit que  $f$  est semi-continue inférieurement si et seulement si pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\{x \in E, f(x) > \alpha\}$$

est un ouvert de  $E$ .

1. Montrez qu'une fonction continue est semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement. Pouvez-vous donner un exemple de fonction semi-continue inférieurement de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui n'est pas continue ?
2. Réciproquement, montrez qu'une fonction semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement est continue.
3. Soit  $f$  une fonction semi-continue supérieurement. Montrez que si  $(U_N)$  est la suite d'ensembles définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad U_N = f^{-1}(]-\infty, N[),$$

alors  $E = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} U_N$ . En déduire que si  $K$  est compact de  $E$ , alors  $f$  est majorée sur  $K$ .

4. Soit  $f$  une fonction semi-continue supérieurement et  $K$  un compact de  $E$ . On se propose de montrer qu'il existe une suite décroissante de fonctions  $(f_n)$  continues de  $K$  dans  $\mathbb{R}$  qui converge vers  $f$  simplement sur  $K$ .

**4.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrez que

$$\sup_{y \in K} (f(y) - nd(x, y))$$

existe et est fini.

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(x) = \sup_{y \in K} (f(y) - nd(x, y)).$$

**4.2.** Montrez que la suite  $(f_n)$  est décroissante sur  $K$ .

**4.3.** Montrez que, pour tout  $x \in K$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) \geq f(x)$ .

**4.4.** Soient  $x, x' \in K$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrez que, pour tout  $y \in K$ , on a

$$|f(y) - nd(x, y) - f(y) + nd(x', y)| \leq nd(x, x').$$

En déduire que

$$f_n(x) \leq nd(x, x') + f_n(x')$$

puis que  $f_n$  est continue sur  $K$ .

**4.5.** On se propose de montrer que, si  $x \in K$ , la suite  $(f_n(x))$  converge vers  $f(x)$ . Montrez qu'il suffit de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrez qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $y \in K$  dans la boule ouverte  $B(x, \alpha)$  de centre  $x$  et de rayon  $\alpha$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait

$$f(y) - nd(x, y) < f(x) + \varepsilon.$$

Montrez que

$$\sup_{y \in K \setminus B(x, \alpha)} (f(y) - nd(x, y))$$

existe et tend vers  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Conclure.

**4.6.** Si la fonction  $f$  n'est pas continue, a-t-on convergence uniforme sur  $K$  de la suite de fonctions  $f_n$  vers  $f$  ?

**4.7.** (*Question hors barême*) Même question si on suppose  $f$  continue.