Université Aix-Marseille I. **Master M1**

Examen de MM1–M23 : Equations aux Dérivées Partielles.
juin 2005
Documents polycopiés du CTES autorisés

Exercice.

Soit $n \geq 2$, $\mathbb{S}_n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, et $d\sigma_n$ l'élément de surface sur $\mathbb{S}_n$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{S}_n$. On rappelle que l'opérateur de Poisson est donné par

$$P[f](x) = \int_{\mathbb{S}_n} f(\zeta) \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \zeta\|^n} d\sigma_n(\zeta).$$

On se propose de montrer que si f est un polynôme sur $\mathbb{R}^n$, alors $P[f_{|\mathbb{S}_n}]$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à celui de f.

1. Soit f un polynôme de degré m sur $\mathbb{R}^n$. Montrez que, si $m = 0$ ou $m = 1$, alors $P[f_{|\mathbb{S}_n}] = f$. (indication : remarquez que tout polynôme de degré 0 ou 1 est harmonique).

2. On se propose de montrer que, si f est un polynôme de degré $m \geq 2$, alors il existe un polynôme g de degré $m - 2$ tel que

$$P[f_{|\mathbb{S}_n}] = (1 - \|x\|^2)g + f.$$

2.1. Montrer qu'il suffit de prouver qu'il existe un polynôme g de degré inférieur ou égal à $m - 2$ tel que

$$\Delta((1 - \|x\|^2)g) = -\Delta f.$$

2.2. On note E l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}^n$ de degré inférieur ou égal à $m - 2$. On note $T : E \to E$ qui à $h \in E$ associe

$$\Delta((1 - \|x\|^2)h).$$

En utilisant le principe du maximum, montrez que T est injective.

2.3. Conclure.

3. Montrez qu'il n'existe pas de polynôme f tel que $\|x\|^2 f$ soit harmonique (indication : sinon, montrez qu'on aurait $P[f_{|\mathbb{S}_n}] = \|x\|^2 f$).

4. Montrez que si f est un polynôme tel que $f_{|\mathbb{S}_n} = 0$ alors il existe un polynôme g tel que $f = (\|x\|^2 - 1)g$.

Problème.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$P(D) = \sum_{|J| \leq m} a_J \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}$$

un opérateur linéaire à coefficients constants d'ordre m, où

$$J = (j_1, \ldots, j_n), \quad |J| = j_1 + \cdots + j_n \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} = \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_n}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}.$$

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. $L^2(\Omega)$ désigne l'espace de Hilbert des classes de fonctions mesurables à valeurs complexes et dont le carré du module est intégrable pour la mesure de Lebesgue dans Ω. Les normes et produits scalaires dans $L^2(\Omega)$ seront notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$. On a

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u\bar{v}\, d\lambda \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = \int_\Omega |u|^2\, d\lambda$$

où $d\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Question préliminaire

Soit $P(D) = \sum a_J \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}$ et $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Montrez que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est solution de

$$P(D)u = g$$

au sens des distributions si et seulement si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle u, P^*(D)\varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$$

où $$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}\, d\lambda \quad \text{et} \quad P^*(D) = \sum (-1)^{|J|} \overline{a_J} \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}.$$

Partie I : Inégalité de Hörmander.

Soit $P(D)$ un opérateur linéaire à coefficients constants d'ordre m. On se propose de montrer que, si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \|P(D)\varphi\| \geq C\|\varphi\| \tag{1}$$

1. Supposons $n = 1$, $\Omega =]0,1[$ et $P(D) = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Montrez que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle (x\varphi)', \varphi\rangle = \langle x\varphi', \varphi\rangle + \langle \varphi, \varphi\rangle \quad \text{et} \quad \langle \varphi, \varphi\rangle = -\langle x\varphi', \varphi\rangle - \langle x\varphi, \varphi'\rangle.$$

En déduire que $\|\varphi\|^2 \leq 2\|\varphi'\|\|\varphi\|$, puis (1) dans ce cas particulier.

2. Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit $P_j(D)$ par

$$P_j(D)\varphi = P(D)(x_j\varphi) - x_jP(D)\varphi. \tag{2}$$

Montrez que $P_j(D)$ est soit nul, soit d'ordre inférieur ou égal à $m-1$. (on montrera qu'on peut se ramener au cas où $j = 1$ et $P(D) = \frac{\partial}{\partial x^J}$)

3. Soit $A = \sup_{x\in\Omega} |x|$ ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$). On se propose de montrer par récurrence sur $m \geq 0$ la propriété $\mathcal{P}(m)$ suivante :

$\mathcal{P}(m) =$“ Pour tout opérateur $P(D)$ linéaire à coefficients constants d'ordre inférieur ou égal à m, si $P_j(D)$ désigne l'opérateur défini par (2), alors on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P_j(D)\varphi\| \leq 2mA\|P(D)\varphi\|\text{”} \tag{3}$$

a. Montrez que $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour $m = 0$.
b. Montrez que, si $\mathcal{P}(m)$ est vraie, alors, pour tout opérateur $P(D)$ d'ordre inférieur ou égal à m, on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P(D)(x_j\varphi)\| \leq (2m+1)A\|P(D)\varphi\|$$

c. Montrez que $\qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P(D)\varphi\|^2 = \|P^*(D)\varphi\|^2.$

(on pourra utiliser le fait que des opérateurs à coefficients constants commutent entre eux).

d. Soit $m \geq 1$. On suppose que $\mathcal{P}(m-1)$ est vraie. Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre m.

i. Montrez que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle P(D)(x_j\varphi), P_j(D)\varphi\rangle = \langle x_jP(D)\varphi, P_j(D)\varphi\rangle + \|P_j(D)\varphi\|^2$$

ii. Montrez que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle P(D)(x_j\varphi), P_j(D)\varphi\rangle = \langle P_j^*(D)(x_j\varphi), P^*(D)\varphi\rangle$$

iii. Montrez que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|P_j(D)\varphi\|^2 = \langle P_j^*(D)(x_j\varphi), P^*(D)\varphi\rangle - \langle x_jP(D)\varphi, P_j(D)\varphi\rangle.$$

iv. En utilisant 3.b, 3.c et l'hypothèse de récurrence, montrez que

$$\|P_j^*(D)(x_j\varphi)\| \leq (2m-1)A\|P_j(D)\varphi\|$$

v. Montrez que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$|\langle x_jP(D)\varphi, P_j(D)\varphi\rangle| \leq A\|P(D)\varphi\|\|P_j(D)\varphi\|,$$

puis que $\|P_j(D)\varphi\| \leq 2mA\|P(D)\varphi\|$. Conclure.

4. Montrez que (1) est vérifiée (on raisonnera par récurrence sur l'ordre de P).

Partie II.

On se propose de montrer que, si Ω est borné dans $\mathbb{R}^n$ et $g \in L^2(\Omega)$, alors il existe $u \in L^2(\Omega)$ solution de

$$P(D)u = g$$

au sens des distributions avec $\|u\| \leq \frac{1}{C}\|g\|$, où C est la constante introduite dans la partie I.

1. Montrez que $\qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P^*(D)\varphi\| \geq C\|\varphi\|.$

2. Soit $E = \{\psi = P^*(D)\varphi \ / \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$. En utilisant la question précédente, montrez que l'application $E \ni \psi \mapsto \langle g, \varphi\rangle$ est bien définie et que c'est une forme semi-linéaire continue pour la norme L^2. (rappel : si E est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel et $f : E \to \mathbb{C}$ une application, on dit que f est semi-linéaire si et seulement si $\bar{f} : E \ni x \mapsto \overline{f(x)}$ est linéaire).

3. Montrez qu'il existe $u \in \overline{E}$ (adhérence de E pour la norme L^2) tel que

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \langle g, \varphi\rangle = \langle u, P^*(D)\varphi\rangle.$$

4. Conclure.