Université Aix-Marseille I. **Master M1**

EXAMEN DE MM1–M23 : EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.
JUIN 2006
DOCUMENTS POLYCOPIÉS DU CTES AUTORISÉS

EXERCICE 1.

Le but de cet exercice est de montrer que si v est une fonction de classe C^∞ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si T est une distribution satisfaisant l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = v$$

où l'on a identifié v avec la distribution associée à la fonction v, alors T est une distribution associée à une fonction u de classe C^∞ dans Ω.

On rappelle que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ est par définition l'opérateur

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

et que la distribution E associée à la fonction $z \mapsto \frac{1}{\pi z}$ vérifie

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{z}} = \delta_0.$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $v \in C^\infty(\Omega)$ tels que

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = v \quad \text{dans } \Omega.$$

Soit Ω' un sous-ensemble ouvert de Ω tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi \equiv 1$ dans un voisinage de $\overline{\Omega'}$.

1. Montrez que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\varphi T) = \varphi v + T'$$

où $T' \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et supp $T' \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega'}$.

2. Montrez que si $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est telle que $\psi \equiv 1$ dans un voisinage de supp φ, alors

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\varphi T) = \psi v + T''$$

où $T'' \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et supp $T'' \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega'}$.

3. En conclure que
$$\varphi T = E * (\psi v) + E * T''.$$

4. Soit $\theta_\epsilon \in \mathcal{D}(B(0,\varepsilon))$ tel que $\theta \equiv 1$ dans $\overline{B}(0, \frac{\varepsilon}{2})$. Montrez qu'on peut choisir $\varepsilon \in]0,1[$ tel que
$$\text{supp}((\theta_\varepsilon E) * T'') \cap \Omega' = \emptyset.$$

5. En écrivant que $E = (1-\theta_\varepsilon)E + \theta_\varepsilon E$, montrez que dans Ω', on a l'égalité
$$T = E * (\psi v) + ((1-\theta_\varepsilon)E) * T''.$$

En déduire que T est associée à une fonction C^∞ dans Ω'. Conclure.

Exercice 2.

En utilisant la méthode des caractéristiques, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles
$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
sachant que $u(x, 0) = x^2$.

Même question sans utiliser la méthode des caractéristiques, mais en passant cette fois-ci en coordonnées polaires.

Exercice 3.

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On note ∂U le bord de U. On se donne un opérateur différentiel linéaire L qui agit sur les fonctions u de classe C^2 dans U et à valeurs réelles grâce à la formule
$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$
où les fonctions $a_{i,j}$ et b_i sont continues dans $\overline{U}$. Dans tout le problème, L est un *opérateur elliptique uniforme* c'est-à-dire que la matrice $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que
$$\forall x \in \overline{U}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq c\|\xi\|^2$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire usuel $\langle \xi, \xi' \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \xi_i'$.

On rappelle que si $u \in C^2(U)$, $\nabla u(x)$ désigne le gradient de u en x, c'est-à-dire que c'est le vecteur de coordonnées

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)$$

et la matrice Hessienne de $Hu(x)$ de u en $x \in U$ est la matrice symétrique

$$Hu(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \le i,j \le n}.$$

1. Soit $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$. Montrez que

$$\sup_{\overline{U}} u \qquad et \qquad \inf_{\overline{U}} u$$

existent.

2. On suppose de plus qu'il existe $x_0 \in U$ avec

$$u(x_0) = \sup_{\overline{U}} u.$$

Montrez que $\nabla u(x_0) = 0$ et que la matrice Hessienne $Hu(x_0)$ est négative, c'est-à-dire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Hu(x_0)\xi, \xi \rangle \le 0.$$

3. On rappelle qu'il existe une matrice P orthogonale telle que

$$PA(x_0)^tP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où $A(x_0)$ désigne la matrice $(a_{i,j}(x_0))_{1 \le i,j \le n}$, ${}^tP$ désigne la transposée de P et $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$. En faisant le changement de variable

$$y = x_0 + P(x - x_0)$$

et en notant $v(y) = u(x_0 + {}^tP(y - x_0))$, montrez que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y_k}(x_0).$$

4. Soit $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$. Déduire des questions précédentes que $Lu < 0$ dans U implique que $\sup_{\overline{U}} u = \sup_{\partial U} u$.

5. Soit $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$. Montrez que $Lu \le 0$ dans U implique que $\sup_{\overline{U}} u = \sup_{\partial U} u$. On pourra considérer pour $\varepsilon > 0$ et pour un $\lambda > 0$ bien choisi

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}.$$