

EXAMEN DE MM1–M23 : EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.
SEPTEMBRE 2005
DOCUMENTS POLYCOPIÉS DU CTES AUTORISÉS

EXERCICE.

Soit $n \geq 2$, $\mathbb{S}_n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, $d\sigma_n$ l'élément de surface sur $\mathbb{S}_n$, $\mathbb{B}_n$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $\omega_n = \sigma_n(\mathbb{S}_n)$.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{S}_n$. Montrez que la solution u du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{B}_n \\ u = f & \text{sur } \mathbb{S}_n \end{cases}$$

est donnée par

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}_n} f(\zeta) \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \zeta\|^n} d\sigma_n(\zeta).$$

On appelle *opérateur de Poisson* l'opérateur qui à une fonction f continue sur $\mathbb{S}_n$ associe la fonction $P[f]$ donnée par

$$P[f](x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}_n} f(\zeta) \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \zeta\|^n} d\sigma_n(\zeta).$$

2. Montrez que si une fonction f est harmonique dans la boule unité alors,

$$\forall x \in \mathbb{B}_n, \quad f(x) = P[f|_{\mathbb{S}_n}](x).$$

On se propose de montrer que si f est un polynôme sur $\mathbb{R}^n$, alors $P[f|_{\mathbb{S}_n}]$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à celui de f .

3. Soit f un polynôme de degré m sur $\mathbb{R}^n$. Montrez que, si $m = 0$ ou $m = 1$, alors $P[f|_{\mathbb{S}_n}] = f$. (indication : remarquez que tout polynôme de degré 0 ou 1 est harmonique).
4. On se propose de montrer que, si f est un polynôme de degré $m \geq 2$, alors il existe un polynôme g de degré $m - 2$ tel que

$$P[f|_{\mathbb{S}_n}] = (1 - \|x\|^2)g + f.$$

- 4.1. Montrer qu'il suffit de prouver qu'il existe un polynôme g de degré inférieur ou égal à $m - 2$ tel que

$$\Delta((1 - \|x\|^2)g) = -\Delta f.$$

- 4.2. On note E l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}^n$ de degré inférieur ou égal à $m - 2$. On note $T : E \rightarrow E$ qui à $h \in E$ associe

$$\Delta((1 - \|x\|^2)h).$$

En utilisant le principe du maximum, montrez que T est injective.

- 4.3. Conclure.

5. Montrez qu'il n'existe pas de polynôme f tel que $\|x\|^2 f$ soit harmonique (indication : sinon, montrez qu'on aurait $P[f|_{\mathbb{S}_n}] = \|x\|^2 f$).
6. Montrez que si f est un polynôme tel que $f|_{\mathbb{S}_n} = 0$ alors il existe un polynôme g tel que $f = (\|x\|^2 - 1)g$.

EXERCICE.

Résoudre l'équation aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$ d'inconnue u vérifiant

$$2x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sachant que $u(1, y) = h(y)$ où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

PROBLÈME.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$P(D) = \sum_{|J| \leq m} a_J \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}$$

un opérateur linéaire à coefficients constants d'ordre m , où

$$J = (j_1, \dots, j_n), \quad |J| = j_1 + \dots + j_n \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} = \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_n}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}.$$

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω . $L^2(\Omega)$ désigne l'espace de Hilbert des classes de fonctions mesurables à valeurs complexes et dont le carré du module est intégrable pour la mesure de Lebesgue dans Ω . Les normes et produits scalaires dans $L^2(\Omega)$ seront notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$. On a

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \bar{v} d\lambda \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = \int_{\Omega} |u|^2 d\lambda$$

où $d\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $P(D) = \sum a_J \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}$ et $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Montrez que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est solution de

$$P(D)u = g$$

au sens des distributions si et seulement si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle u, P^*(D)\varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$$

$$\text{où} \quad \langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} d\lambda \quad \text{et} \quad P^*(D) = \sum (-1)^{|J|} \bar{a_J} \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}.$$

Soit $P(D)$ un opérateur linéaire à coefficients constants d'ordre m . On admet que, si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \|P(D)\varphi\| \geq C\|\varphi\| \quad (1)$$

On se propose de montrer que, si Ω est borné dans $\mathbb{R}^n$ et $g \in L^2(\Omega)$, alors il existe $u \in L^2(\Omega)$ solution de

$$P(D)u = g$$

au sens des distributions avec $\|u\| \leq \frac{1}{C}\|g\|$, où C est la constante introduite de l'équation (1) .

2. Montrez que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \|P(D)\varphi\|^2 = \|P^*(D)\varphi\|^2$$

(utiliser le fait que des opérateurs à coefficients constants commutent entre eux). En déduire que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \|P^*(D)\varphi\| \geq C\|\varphi\|$.

- 3.** Soit $E = \{\psi = P^*(D)\varphi / \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$. En utilisant la question précédente, montrez que l'application $E \ni \psi \mapsto \langle g, \varphi \rangle$ est bien définie et que c'est une forme semi-linéaire continue pour la norme L^2 . (rappel : si E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ une application, on dit que f est semi-linéaire si et seulement si $\bar{f} : E \ni x \mapsto \overline{f(x)}$ est linéaire).

- 4.** Montrez qu'il existe $u \in \overline{E}$ (adhérence de E pour la norme L^2) tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle g, \varphi \rangle = \langle u, P^*(D)\varphi \rangle.$$

- 5.** Conclure.