Université Aix-Marseille I. **Master M1**

EXAMEN DE MM1–M23 : EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.
SEPTEMBRE 2006
DOCUMENTS POLYCOPIÉS DU CTES AUTORISÉS

EXERCICE 1.

On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathbb{C}$ et on considère l'opérateur de Cauchy-Riemann défini pour $z = x + iy \equiv (x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_k(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{1}{z} \text{ pour } |z| \geq \dfrac{1}{k} \\ k(x-iy) = k^2\bar{z} \text{ pour } |z| \leq \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_k définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. Calculer la limite de f_k dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ lorsque k tend vers $+\infty$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
4. Calculer la limite de $\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ lorsque k tend vers $+\infty$.
5. Déduire des questions précédentes que l'on a $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{\pi z}\right) = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

EXERCICE 2.

En utilisant la méthode des caractéristiques, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - \left(y + \frac{2}{5}x\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sachant que $u(x, 0) = x^2$.

Exercice 3.

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On note ∂U le bord de U. On se donne un opérateur différentiel linéaire L qui agit sur les fonctions u de classe C^2 dans U et à valeurs réelles grâce à la formule

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

où les fonctions $a_{i,j}$ et b_i sont continues dans $\overline{U}$. Dans tout le problème, L est un *opérateur elliptique uniforme* c'est-à-dire que la matrice $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in \overline{U}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq c\|\xi\|^2$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire usuel $\langle \xi, \xi' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \xi_i'$.

On rappelle que si $u \in C^2(U)$, $\nabla u(x)$ désigne le gradient de u en x, c'est-à-dire que c'est le vecteur de coordonnées

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right).$$

On admet que si $Lu \leq 0$ dans U, alors

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

1. Soit $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$. On suppose que $Lu \leq 0$ et qu'il existe un point $x^0 \in \partial U$ tel que $u(x^0) > u(x)$ pour tout $x \in U$. On suppose de plus qu'il existe un point $a \in U$ et $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a,r)$ de centre a et de rayon r soit incluse dans Ω et telle que $x^0 \in \partial B(a,r)$.

a. On note $\vec{n}(x^0)$ le vecteur normal extérieur unitaire à la boule $B(a,r)$ au point x^0. Montrez que

$$\left\langle \nabla u(x^0), \vec{n}(x^0) \right\rangle \geq 0.$$

On peut supposer sans perdre en généralité que le centre a de la boule est le point 0, ce que nous ferons dans la suite de l'exercice.

b. Pour $x \in B(0,r)$, on pose, pour $\lambda > 0$ que l'on fixera plus tard

$$v(x) = e^{-\lambda\|x\|^2} - e^{-\lambda r^2}, \qquad x \in B(0,r)$$

Montrez que

$$L(v) \leq e^{-\lambda\|x\|^2}(-4c\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda \text{ tr } \mathbf{A} + 2\lambda\|\mathbf{b}\|\|x\|)$$

où $\mathbf{A}$ est la matrice $(a_{i,j}(x))$, tr désigne la trace, et $\mathbf{b}$ est le vecteur $(b_1(x), \ldots, b_n(x))$. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall x \in B(0,r) \setminus \overline{B(0,r/2)}, \qquad L(v) \leq 0.$$

c. Montrez qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in \partial B(0,r/2), \qquad u(x^0) \geq u(x) + \varepsilon v(x).$$

Montrez qu'on a de plus

$$\forall x \in \partial B(0,r), \qquad u(x^0) \geq u(x) + \varepsilon v(x).$$

d. On note $C = B(0,r) \setminus \overline{B(0,r/2)}$. Montrez que $L(u + \varepsilon v - u(x^0)) \leq 0$ dans C, que $u + \varepsilon v - u(x^0) \leq 0$ sur ∂C. En déduire que $u + \varepsilon v - u(x^0) \leq 0$ dans C.

e. Montrez que

$$\left\langle \nabla u(x^0) + \varepsilon \nabla v(x^0), \vec{n}(x^0) \right\rangle \geq 0.$$

et que

$$\left\langle \nabla u(x^0), \vec{n}(x^0) \right\rangle > 0.$$

2. On se propose de montrer que si $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ où U est un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^n$ et si u atteint son maximum dans $\overline{U}$ en un point de U, alors u est constante dans U. Pour cela, on pose $M = \max_{\overline{U}} u$ et $W = \{x \in U,\ u(x) = M\}$. Supposons $W \neq U$ et posons $V = \{x \in U,\ u(x) < M\}$.

a. Montrez qu'il existe $y \in V$ tel que $d(y, W) < d(y, \partial U)$.

b. On considère la boule B de centre y et de rayon $d(y, \partial V)$. Montrez qu'il existe $x^0 \in W$ avec $x^0 \in \partial B$. Conclure.