Agrégation de Mathématiques **2011-2012**
CMI **Université d'Aix-Marseille**

Analyse à une variable complexe.

1. Séries entières.

Références: Gourdon, Analyse et Pommellet, Cours d'Analyse.

Notation : Dans tout ce qui suit, si $a \in \mathbb{C}$ et $R \geq 0$, nous notons :
- $D(a,R)$ le disque ouvert de centre a et de rayon R ($D(a,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| < R\}$)
- $\overline{D}(a,R)$ le disque fermé de centre a et de rayon R ($\overline{D}(a,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| \leq R\}$).
- $D'(a,R)$ le disque épointé de centre a et de rayon R ($D'(a,R) = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z-a| < R\}$).

Définition. On appelle *série entière* toute série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où z est une variable complexe et où $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes.

$\oplus$ **Lemme d'Abel.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Alors
i. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
ii. Pour tout $r \in]0, |z_0|[$, la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ converge normalement dans $\overline{D}(0,r)$.

Définition du rayon de convergence et du disque de convergence. Si $\sum_n a_n z^n$ est une série entière, le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \text{ la suite } (|a_n| r^n)_n \text{ est bornée}\}$$

s'appelle le *rayon de convergence* de $\sum_n a_n z^n$. On dit que $D(0, R)$ est le *disque de convergence.*

Il découle du lemme d'Abel que :
- pour tout $z \in D(0, R)$, $\sum_n a_n z^n$ converge absolument.
- pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$, la série diverge.
- pour tout réel r tel que $0 \leq r < R$, la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

$\oplus$ **Règle de d'Alembert.** Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est $R = \dfrac{1}{\lambda}$ avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

$\oplus$ **Règle de Cauchy.** Si $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est $R = \dfrac{1}{\lambda}$ avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

$\oplus$ **Formule d'Hadamard.** Le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est $R = \dfrac{1}{\lambda}$ avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, et où

$$\lambda = \limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}.$$

$\mathbb{C}$ **Exercice 1.0.**

1. Calculer le rayon de convergence des séries entières $\sum_n z^n/n!$, $\sum_n n^\alpha z^n$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_n n! z^n$.
2. Montrez que si la règle de d'Alembert s'applique pour une série entière, alors celle de Cauchy s'applique aussi. Montrez que la réciproque est fausse (on pourra par exemple regarder la série $\sum_n a_n z^n$ avec $(a_n)_n$ définie par $a_n = \frac{1}{2}$ si n est pair et $a_n = 1$ si n est impair).
5. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert ou celle de Cauchy à la série entière $\sum_n z^{2^n}$?
6. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_n z^{2^n}$?

Somme et produit de séries entières. Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement égal à $R > 0$ et $R' > 0$. Notons f et g les sommes de ces séries entières sur leur disque de convergence $D(0, R)$ et $D(0, R')$.

Somme. La série entière $\sum_n c_n z^n$ définie par $c_n = a_n + b_n$ est appelée *somme* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R'' vérifie $R'' \geq \inf(R, R')$. Sur $D(0, R'')$ $f + g$ est la somme de la série entière $\sum_n c_n z^n$.

Produit. La série entière $\sum_n d_n z^n$ définie par $d_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ est appelée *produit* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R'' vérifie $R'' \geq \inf(R, R')$. Sur $D(0, R'')$ fg est la somme de la série entière $\sum_n d_n z^n$.

$\oplus$ **Continuité de la somme d'une série entière sur son disque de convergence.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si f est la somme de la série, alors f est continue sur le disque de convergence.

$\mathbb{C}$ **Exercice 1.1.** Donner le développement en série entières des fonctions suivantes, et donner le rayon de convergence de la série obtenue :

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3} \qquad \text{en } 0; \qquad g(z) = \frac{1}{3 - 2z} \qquad \text{en } 3;$$

$$h(z) = e^z \qquad \text{en } 1.$$

Exercice 1.2. ([Go], p. 246). Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence ≥ 1. On suppose $b_n > 0$ pour tout n et que la série $\sum b_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.
a) S'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{A_n}{B_n} = \ell,$$

montrer que

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\sum_{n=0}^\infty a_n x^n}{\sum_{n=0}^\infty b_n x^n} = \ell.$$

b) Si on suppose simplement

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{A_0 + \cdots + A_{n-1}}{n} = \ell \qquad \text{avec} \qquad \ell \in \mathbb{C},$$

montrer que

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \ell.$$

c) Application. Lorsque $x \to 1$ par valeurs inférieures, montrer les équivalents

$$\sum_{n=0}^\infty x^{n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}, \qquad \sum_{n=0}^\infty x^{a^n} \sim -\frac{\log(1-x)}{\log a}, \ (a \in \mathbb{N},\ a \geq 2),$$

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{4n+1} \sim \frac{1}{2}.$$

⊕ **Exercice 1.3. Théorème de Bernstein. ([Go]) [(D: 18, 41, 43)].** Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in]-a, a[, \qquad f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

On se propose de montrer que f est développable en série entière sur $]-a, a[$.
On pose

$$F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]0, a[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + R_n(x)$$

   où $R_n \geq 0$. Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}$ converge.
2. Montrer que, pour $0 < x < y < a$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq R_n(x) \leq R_n(y) \left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1}.$$

   (*Indication.* On pourra montrer que, pour tout $t \in [0, x]$, $(x - t)/(y - t) \leq x/y$). En déduire que $R_n(x) \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$ et que F est développable en série entière sur $]-a, a[$.
3. On revient à la fonction f. Posons pour $x \in]-a, a[$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

   Montrez que $f(x) = S_{2n+1}(x) + r_n(x)$ avec $|r_n(x)| \leq R_n(|x|)$. Montrez que $S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$.
4. Soit (E, d) un espace métrique et $(u_n)_n$ une suite de E telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n-1})_n$ convergent vers la

même limite. Montrez que la suite (u_n) converge. En déduire le théorème de Bernstein.

Exercice 1.4. Solutions d'équations fonctionnelles ([Po], p. 228, [D: 1, 41, 43]) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe un nombre réel q vérifiant $|q| < 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - qx)f(qx)$. Montrer que si deux solutions f et g coïncident en 0, elles coïncident sur $\mathbb{R}$. En déduire que toute solution f se développe en série entière de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 1.5. Solution d'équations différentielles : l'équation de Bessel. ([Po], p.229). On considère l'équation différentielle dite "équation de Bessel " :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

avec $\nu \notin \mathbb{Z}$. Chercher toutes les solutions de la forme $y(x) = x^\lambda S(x)$ où S est une série entière dont on déterminera le rayon de convergence.

$\mathbb{C}$ **Exercice 1.6. Nombre de partitions, nombres de Stirling ([Po], p. 230-231, [D: 21, 41, 43, 47] et en algèbre : 45)**. Pour $n \in \mathbb{N}$; on note le nombre de Stirling

$$p_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Montrez que p_n est bien défini.
On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(e^x - 1)$. Montrer que f est développable en série entière $\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$ où $d_k = p_k/k!$ et que f vérifie l'équation différentielle $y' = e^x y$.
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k p_k$.

On note q_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire un sous ensemble de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ dont E est la réunion disjointe.

Soit $E = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ un ensemble à $n+1$ éléments, et pour $k \in \{0, \dots, n\}$, r_k désigne le nombre de partitions de E telles que a_{n+1} appartienne à un ensemble A_k de la partition et possédant $k+1$ éléments.
Calculez r_{n+1}. Montrez que $q_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} r_k$.
Montrez que $r_k = C_n^k q_{n-k}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k q_k$.
En déduire que $p_n = q_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer q_1, q_2, q_3.

Voir aussi l'exercice sur les suites récurrentes linéaires et dénombrements page 232 dans [Po].
Voir aussi, dans [Go], le théorème d'Abel page 252, le théorème Taubérien faible p. 253, le théorème Taubérien fort p. 289, les nombres et polynômes de Bernoulli p. 299.

2. Fonctions holomorphes ou $\mathbb{C}-$dérivables.

Fonctions holomorphes. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.
- Si $z_0 \in \mathbb{C}$, on dit que f est $\mathbb{C}-$*dérivable* en z_0 lorsque

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. On note alors $f'(z_0)$ cette limite. - On dit que f est *holomorphe* sur U lorsque f est $\mathbb{C}-$dérivable en tout point z_0 de U.
- On note $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes de U dans $\mathbb{C}$.

Proposition : *l'ensemble $H(U)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert U muni de l'addition, de la multiplication et de sa structure de $\mathbb{C}-$espace vectoriel est une algèbre. Autrement dit, toute combinaison linéaire finie de fonctions holomorphes est holomorphe et le produit de deux fonctions holomorphes est holomorphe.*

La composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f \in H(U)$, $g \in H(V)$ telles que $f(U) \subset V$.*
Alors $g \circ f \in H(U)$ et

$$\forall z \in H, \qquad (g \circ f)'(z) = f'(z) \cdot (g' \circ f)(z).$$

⊕ **Les séries entières sont holomorphes.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la somme $f(z)$ de cette série définit une fonction holomorphe sur le disque de convergence $D(0, R)$. De plus, pour tout $z_0 \in D(0, R)$,*

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

⊕ **Corollaire.** *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa somme est $\mathbb{C}-$dérivable à tous les ordres sur son dique de convergence, et elle est la somme de sa série de Taylor :*

$$\forall z \in D(0, R), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Nous étudions à partir de maintenant les conditions nécessaires et suffisantes sur les dérivées d'ordre 1 d'une fonction pour qu'elle soit holomorphe.

Conditions de Cauchy-Riemann. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$. f est holomorphe sur U si et seulement si f est différentiable sur U et, pour tout $z \in U$,*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0$$

où $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ désigne l'opérateur $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

Corollaire. *Pour toute fonction différentiable f d'un ouvert U dans $\mathbb{C}$ et pour tout $z_0 \in U$, nous avons*

$$d_{z_0} f(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)k.$$

Si on pose $w = h + ik$, ceci se réécrit

$$d_{z_0} f(h,k) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)w + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\bar{w}$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \qquad \text{et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right).$$

En particulier, f est holomorphe si et seulement si f est différentiable sur U et sa différentielle est $\mathbb{C}-$linéaire en tout point de U.

Dans ce cas, pour tout $z \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0).$$

Enfin, si $f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$, l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ dans U s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} & = & -\dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} & = & \dfrac{\partial P}{\partial x} \end{cases}$$

Les fonctions holomorphes sont harmoniques. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. Alors f, Re f et Im f sont harmoniques. De plus pour toute fonction g de classe $C^2(U)$ et à valeurs complexes, nous avons

$$\Delta g = 4\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{z} \partial z}$$

En fait, nous verrons plus loin que les fonctions holomorphes sont de classe C^∞.

$\mathbb{C} \bigoplus$ **Exercice 2.1.** Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Montrez que sur U :

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \bar{z}} \qquad \text{et} \qquad \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

$\mathbb{C} \bigoplus$ **Exercice 2.2.** Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{C}$ deux applications différentiables. Montrez que

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z}(z) = \frac{\partial g}{\partial w}(f(z))\frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(f(z))\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z)$$

et

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial g}{\partial w}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(f(z))\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z)$$

Montrez que si f et g sont holomorphes, alors $g\circ f$ est holomorphe et

$$(g\circ f)' = (g'\circ f)f'.$$

$\mathbb{C}\bigoplus$ **Exercice 2.3.** Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $\varphi : U\times V \to \mathbb{C}$ une application différentiable. On suppose que pour tout $u \in U$, l'application $V \ni v \mapsto \varphi(u,v)$ est holomorphe et que pour tout $v\in V$, l'application $U \ni u \mapsto \varphi(u,v)$ est holomorphe. On suppose maintenant que pour tout $z\in U$, $\bar{z}\in V$ et on pose, pour $z\in U$, $f(z)=\varphi(z,\bar{z})$. Montrer que f est différentiable sur U et que pour tout $z\in U$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(z,\bar{z}), \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(z,\bar{z}).$$

Application : calculer $\frac{\partial f}{\partial z}(z)$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)$ pour :

$$f(z)=z,\ f(z)=\bar{z},\ f(z)=z^{\alpha}\bar{z}^{\beta},$$

$$f(z)=|z|^2,\ f(z)=e^{|z|^2},\ f(z)=\frac{\bar{z}}{|z|^2+1}.$$

$\mathbb{C}\bigoplus$ **Exercice 2.4.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $V=\{\overline{z},\ z\in U\}$. Soit $f\in H(U)$ et g définie sur V par $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$. Montrez que $g\in H(V)$.

$\mathbb{C}\bigoplus$ **Exercice 2.5.** Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. Montrez l'équivalence des propriétés suivantes :
a) f est constante
b) Re f est constante
c) Im f est constante
d) $z\mapsto \overline{f(z)}$ est holomorphe
e) L'image de f est contenue dans une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{C}\bigoplus$ **Exercice 2.6.** Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. On dit que $\varphi : U\to V$ est un biholomorphisme de U dans V si et seulement si φ est une application holomorphe sur U, bijective de U dans V

et telle que la bijection réciproque $\varphi^{-1} : V \to U$ soit holomorphe sur V.
On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0\}$. Montrez qu'il existe un biholomorphisme de $D(0,1)$ dans $\mathbb{H}$.

Primitives. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, une *primitive* de f est une fonction $F \in H(U)$ telle que $F' = f$.

Primitives des séries entières. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f la somme de cette série. Alors f admet une primitive F. De plus les primitives F sont de la forme*

$$\forall z \in D(0,R), \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + C$$

où $C \in \mathbb{C}$ est une constante quelconque.

3. Fonction exponentielle complexe.

Référence : Rudin, Analyse Réelle et Complexe.

⊕ **Fonction exponentielle complexe.** La série entière $\sum_n z^n/n!$ ayant pour rayon de convergence $R = +\infty$, on définit

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Nous avons :

$$\forall w, z \in \mathbb{C}, \qquad \exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w.$$

Théorème.
(a) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp z \neq 0$.
(b) $\exp$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *et* $\exp' = \exp$.
(c) la restriction de la fonction exponentielle à l'axe réel est une fonction positive croissante et

$$\lim_{+\infty} \exp = +\infty, \qquad \lim_{-\infty} \exp = 0$$

(d) Il existe un nombre positif π *tel que* $\exp z = 1$ *si et seulement si* $z/2\pi i$ *est un entier relatif.*
(e) la fonction exponentielle est périodique, de période $2\pi i$.
(f) L'application $t \mapsto \exp(it)$ *est une surjection de l'axe réel sur le cercle unité.*
(g) Notons $\cos t = Re(\exp it)$ *et* $\sin t = Im(\exp it)$.
Nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On en déduit que $\cos$ *et* $\sin$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et que* $\cos' = -\sin$ *et* $\sin' = \cos$, *et que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

(h) pour tout nombre complexe $w \neq 0$, *il existe un nombre complexe* z *tel que* $\exp z = w$.
(i) $\pi = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} dt$.

Définition. Pour $z \in \mathbb{C}$, nous notons aussi e^z le nombre $\exp z$.

4. Arguments, Logarithmes, Racines carrées, Puissances.

Définition. Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
On appelle *logarithme* de z tout nombre complexe w tel que $\exp w = z$.
On appelle *argument* de z tout nombre réel t tel que $\exp(it) = \frac{z}{|z|}$.
On appelle *racine carrée* de z tout nombre complexe w tel que $w^2 = z$.
Si $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle *puissance α de z* tout nombre complexe de la forme $\exp(\alpha w)$ où w est un logarithme de z.

Définition. Soit X une partie de $\mathbb{C}^*$.
On appelle *détermination continue du logarithme sur X* toute application continue $L : X \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in X, \qquad \exp(L(z)) = z.$$

On appelle *détermination continue de l'argument sur X* toute application continue $A : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall z \in X, \qquad \exp(iA(z)) = \frac{z}{|z|}.$$

On appelle *détermination continue de la racine carrée sur X* toute application continue $R : X \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in X, \qquad (R(z))^2 = z.$$

En particulier, une fonction L est une détermination continue du logarithme si et seulement si, pour tout $z \in X$, $L(z) = \ln|z| + iA(z)$ où A est une détermination continue de l'argument.

Théorème. Il n'existe pas de détermination continue de l'argument sur $\mathbb{C}^*$. Il en est de même pour ce qui est des déterminations continues du logarithme et de la racine carrée.

$\bigoplus$ **Théorème et Définition.** On appelle *détermination principale de l'argument* et on note la note Arg la détermination continue de l'argument $\mathrm{Arg} : \mathbb{C}\backslash]-\infty,0] \to]-\pi,\pi[$ qui à un élément z de $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0] \to]-\pi,\pi[$ associe l'unique argument de z dans $]-\pi,\pi[$.

On appelle *détermination principale du logarithme* et on note cette application Ln l'application définie par $\mathrm{Ln} : \mathbb{C}\backslash]-\infty,0] \ni z \mapsto \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$.

On appelle *détermination principale de la racine carrée* l'application $R : \mathbb{C}\backslash]-\infty,0] \ni z \mapsto \exp(\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\, z)$.

Enfin, si $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle *détermination principale de la puissance* α l'application $P_\alpha : \mathbb{C}\backslash]-\infty,0] \ni z \mapsto \exp(\alpha\,\mathrm{Ln}\, z)$.

Les déterminations principales du logarithme, de la racine carrée, et de la puissance α sont holomorphes sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$, $\mathrm{Ln}'\, z = \dfrac{1}{z}$.

Théorème. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$ sur lequel il existe une représentation continue L_0 du logarithme. Alors toute autre détermination continue L sur U est de la forme $L = L_0 + 2\pi k i$ où k est une constante dans $\mathbb{Z}$.*
De plus, L est holomorphe, et pour tout $z \in U$, $L'(z) = \frac{1}{z}$.
Réciproquement, si F est une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ (c'est-à-dire si F est holomorphe et si $F'(z) = 1/z$), alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $F + c$ soit une détermination continue du logarithme.

⊕ **Corollaire.** *Pour tout $\alpha \in [-\pi, \pi[$, on peut refaire la construction précédente d'une détermination continue du logarithme, d'un argument, etc... sur l'ensemble $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0]e^{i\alpha})$. On aura des résultats analogues. On peut donc construire des représentations continues de logarithme, d'argument, etc... sur n'importe quel ensemble de la forme $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite fermée issue de l'origine.*

⊕ **Théorème.**

$$\forall z \in D(0,1), \qquad \mathrm{Ln}\,(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

$\mathbb{C}$ ⊕ **Exercice 4.1. Règle de Weierstrass ([Po], p. 204-205).** Soit $u_n(m)$ une suite de nombres complexes indexés par $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{m\to+\infty} u_n(m) = u_n$, et qu'il existe une suite (v_n) de nombres réels positifs telle que $\sum v_n < \infty$ et telle que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad |u_n(m)| \leq v_n.$$

Montrez de deux façons différentes que

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(m) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Si w_n est une suite de nombre complexes, on dit que le produit $\prod (1+w_n)$ converge si la suite $\prod_{n=0}^{N} (1+w_n)$ converge, et on note sa limite $\prod_{n=0}^{\infty} (1+w_n)$.

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, montrez que

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n(m)) \right) = \prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n).$$

On pourra pour cela, montrer qu'il existe un rang N à partir duquel $v_n < 1$, utiliser le logarithme complexe et prouver que, pour $|z| < 1$, $|\ln(1+z)| \leq \dfrac{|z|}{1-|z|}$.

$\mathbb{C} \bigoplus$ **Exercice 4.2. Une application du principe de Weierstrass : la formule d'Euler ([Ca], p.90-91).** Montrez que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m.$$

On pourra appliquer la règle de Weierstrass, ou alors montrer que

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m \right| \leq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{m}\right)^m.$$

On définit P_m par

$$P_m(z) = \frac{1}{2i} \left[\left(1 + \frac{iz}{2m}\right)^{2m} - \left(1 - \frac{iz}{2m}\right)^{2m} \right]$$

Trouver les racines de P_m. En déduire que

$$\sin z = z \lim_{m \to \infty} \prod_{n=1}^{m-1} \left(1 - \frac{z^2}{4m^2 \tan^2 \frac{n\pi}{2m}}\right),$$

puis que

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Montrez (formule dite des compléments) que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

5. L'Intégrale de Cauchy et l'analyticité des fonctions holomorphes.

Définition d'un chemin. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle *chemin dans* U toute application continue et C^1 par morceaux $\gamma : [a,b] \to U$ où $a < b$.
On rappelle que cela veut dire qu'il existe une subdivision finie $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[0,1]$ telle que, pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, $\gamma_{|]t_i,t_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction C^1 sur $[t_{i-1},t_i]$.
Nous dirons que γ est un *chemin fermé* si et seulement si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Nous notons $\gamma^* = \gamma([a,b])$ et nous disons que γ^* est le *support* de γ.

Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un chemin. Avec les notations précédentes, si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, on note

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Bien entendu, si δ est une autre paramétrisation du même chemin, c'est-à-dire si $\delta : [a',b'] \to U$ est telle qu'il existe une application strictement croissant $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$ de classe C^1 et telle que φ^{-1} soit aussi de classe C^1, et telle que $\delta = \gamma \circ \varphi$, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\delta f(z)dz.$$

Bien faire attention au fait que l'intégrale d'une fonction continue sur un chemin ne dépend pas uniquement du support γ^* mais dépend aussi du sens de parcours. En effet, si par exemple $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ est un chemin et si $\gamma^- := \gamma(1-t)$ est le même chemin parcouru dans l'autre sens, alors si f est continue au voisinage de γ^*, nous avons

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz.$$

Le théorème suivant joue un rôle très important dans la théorie des fonctions holomorphes :

⊕ **Indice d'un chemin fermé par rapport à un point.** *Soit γ un chemin fermé, U le complémentaire de γ^* dans le plan. On définit, pour $z \in U$*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

et on appelle ce nombre l'indice de γ par rapport à z. Alors Ind_γ *est une fonction à valeurs entières sur U qui est constante sur chaque composante connexe de U et qui est nulle sur la composante connexe non bornée de U.*

⊕ **Remarque importante.** Si on se fixe un point z dans U, $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ correspond au "nombre de tours" fait par γ autour du point z, comptés positivement si le sens de parcours est direct, et négativement autrement.

Pour comprendre cette interprétation, plaçons nous dans un cas particulier : supposons que $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ soit C^1 et que 0 n'appartienne pas à γ^*. Nous allons interpréter géométriquement l'indice de γ par rapport à 0. Si on note Arg la détermination principale de l'argument dans $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$, et nous supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de points $t_1 < \cdots < t_N$ dans $[a, b]$ tels que $\gamma(t_j) \in]-\infty, 0[$ pour $j = 1, \ldots, N$. Nous avons alors pour tout $t \in [a,b] \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}$

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i(\operatorname{Arg} \circ \gamma)(t)} = r(t) e^{i\varphi(t)}$$

où r et φ sont C^1 sur $t \in [a,b] \setminus \{t_1, \ldots, t_n\}$. Sur cet ensemble, nous avons

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t).$$

donc

$$\operatorname{Ind}_\gamma(0) = \left(\int_a^{t_1} + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} + \int_{t_N}^{b} \right) \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t) \right) dt.$$

Par continuité de $\ln r$, les intégrales de r'/r disparaissent car $\ln r(a) = \ln r(b)$ (le chemin est fermé). Enfin

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_a^{t_1} + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} + \int_{t_N}^{b} \right) (i\varphi'(t))\, dt$$

donne le nombre de fois où γ traverse la demi-droite $]-\infty, 0]$, positivement dans le sens direct, c'est-à-dire de haut en bas, et négativement dans l'autre sens.

Exercice 5.0. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Pour $z \notin \partial D(a,r)$, calculer $\operatorname{Ind}_{\partial D(a,r)}(z)$ le bord du disque étant parcouru dans le sens positif. De même pour le bord d'un triangle $[a,b,c]$ parcouru dans le sens direct.

Nous avons le théorème suivant :

Théorème de Cauchy. *Pour toute fonction holomorphe f dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que f' soit continue sur U et pour tous z, w dans U, si γ est un chemin joignant w à z (c'est-à-dire que $\gamma(a) = w$ et $\gamma(b) = w$), nous avons*

$$f(z) - f(w) = \int_\gamma f'(\zeta) d\zeta.$$

Si γ est un chemin fermé (c'est-à-dire si $w = z$), nous avons

$$\int_\gamma f'(\zeta) d\zeta = 0.$$

Exercice 5.1. Soit γ un chemin fermé. Calculer, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_\gamma z^n dz.$$

Si maintenant $0 \notin \gamma^*$, calculer, pour $n = -2, -3, -4, \ldots$

$$\int_\gamma z^n dz.$$

Que vaut l'intégrale précédente si $n = -1$?

$\oplus$ **Ouvert étoilé.** Soit U un ouvert et $z_0 \in U$. On dit que U est *étoilé par rapport à z_0* si et seulement si pour tout $z \in U$, le segment $[z_0, z] = \{(1-t)z_0 + tz,\ t \in [0, 1]\}$ est inclus dans U.

$\oplus$ **Existence de primitives des fonctions holomorphes dans un ouvert étoilé.** *Soit U un ouvert étoilé, $p \in U$ et f une fonction holomorphe dans $U \setminus \{p\}$, continue dans U. Alors F admet une primitive dans U.*

⊕ **Théorème de Cauchy dans un ouvert étoilé.** *Soit U un ouvert étoilé, $p \in U$, $f \in H(U \setminus \{p\})$, continue sur U, on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

pour tout chemin fermé dans U.

⊕ **Formule de Cauchy dans un ouvert étoilé.** *Soit U un ouvert étoilé, et γ un chemin fermé dans U. Soit $f \in H(U)$. Si $z \in U$, et $z \notin \gamma^*$, on a*

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

⊕ **Définition des fonctions analytiques.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est *analytique* sur U si et seulement si, pour tout $z_0 \in U$, il existe un voisinage U_{z_0} de z_0 inclus dans U tel que, dans ce voisinage, il existe une série entière $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ qui converge dans U_{z_0} et telle que f soit la somme de cette série entière.

Grâce au fait que toute série entière soit holomorphe sur son disque de convergence, on en déduit que toute fonction analytique est holomorphe. Nous allons maintenant voir que la formule de Cauchy nous donne la réciproque.

⊕ **Toute fonction holomorphe est analytique.** *Soit U un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. Alors U est analytique dans U. De plus, si $z_0 \in U$, alors f est développable en série entière dans le disque $D(z_0, r)$ où $r = d(z_0, \partial U)$.*

⊕ **Corollaire.** *Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $f \in H(U)$, alors $f' \in H(U)$.*

⊕ **Corollaire.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. Alors, pour tout $z_0 \in U$, si $r = d(z_0, \partial U)$, la série entière*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converge sur $D(z_0, r)$ (autrement dit, le rayon de convergence de $\sum_n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n$ est au moins égal à $d(z_0, \partial U)$), et

$$f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad \text{sur } D(z_0, r).$$

De plus, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

$\mathbb{C}$ ⊕ **Exercice 5.2. Logarithme d'une fonction holomorphe** Soit U un ouvert étoilé et $f : U \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe. Montrer qu'il existe $g \in H(U)$ telle que $e^g = f$. On pourra considérer une primitive de f'/f.

Exercice 5.3. On se propose de montrer directement que si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $f : U \to \mathbb{C}$ est de classe C^1 et vérifie $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, alors, pour tout $z \in U$ et tout $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, r) \subset U$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Montrer qu'il suffit de montrer que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

Pour $t \in [0,1]$, on pose $\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(z+tre^{i\theta}) d\theta$. Montrez que ϕ est dérivable, puis que ϕ est constante (calculez $\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\theta}[f(z + tre^{i\theta})] d\theta$). Concluez.

$\mathbb{C} \bigoplus$ **Exercice 5.4. Existence d'un point singulier sur le cercle de convergence.([QZ], [Ru]) [(D: 3, 7, 41, 43, 45)]** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. On dit que $a \in U$ est régulier s'il existe une série entière en $(z-a)$ qui coïncide avec f au voisinage de a. Sinon, on dit que a est singulier.
Soit f une série entière de rayon de convergence R, définie sur son disque de convergence.

1. Montrer que l'ensemble des points réguliers de f forme un ouvert.
2. Soit (E,d) un espace métrique et K un compact de E. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K. Montrez que :

$$\exists \varepsilon > 0, \qquad \forall x \in K, \qquad \exists i \in I, \qquad B(x,\varepsilon) \subset U_i.$$

   (Lemme de Lebesgue).
3. En déduire l'existence d'un point singulier sur le cercle de convergence
4. Posons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Montrez que tous les points du cercle de convergence sont singuliers.

6. Propriétés des fonctions holomorphes.

Nous commençons par rappeler les définitions et propriétés des points isolés et d'accumulation d'un ensemble.

Rappel. Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E.

Les boules ouvertes de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ sont notées $B(x, \varepsilon)$.
Un point $a \in A$ est dit isolé dans A si et seulement si :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}.$$

Un point x de E est un point d'accumulation de A si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, \varepsilon) \cap A \neq \{x\}.$$

En particulier, un point x de E est un point d'accumulation de A si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ contient une infinité de points de A.
x est un point d'accumulation de A si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.
L'ensemble des points d'accumulation d'un ensemble quelconque est fermé.
Si A est quelconque, $\overline{A}$ est la réunion disjointe de l'ensemble des points d'accumulation et des points isolés de A.

⊕ **Principe des zéros isolés.** *Les zéros d'une fonction holomorphe non nulle sur un ouvert connexe sont isolés. En d'autres termes, si l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U a un point d'accumulation <u>dans U</u>, alors $f \equiv 0$.*

Remarque. Il est important que le point d'accumulation soit dans U, sinon le résultat est faux. Par exemple, si $U = D(0, 1)$ et si $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$, alors $f \in H(U)$ est non nulle et s'annule aux points $1 - \frac{1}{n\pi}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

⊕ **Corollaire.** *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si $f \in H(U)$ et $g \in H(U)$ sont deux fonctions qui coïncident sur un ensemble A qui a un point d'accumulation dans U, alors $f \equiv g$.*

Applications (en exercice).

$\mathbb{C} \bigoplus$ **Exercice 6.1.** Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ et $f \in H(D(a,R))$. Montrez que

$$\forall r \in [0, R[, \qquad f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

(propriété de la moyenne).

$\mathbb{C} \bigoplus$ **Exercice 6.2.** Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ et $f \in H(D(a,R))$. On rappelle que

$$\forall r \in [0, R[, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Montrez les inégalités de Cauchy : Si $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D(a,R)$, alors

$$\forall n \in N, \qquad |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

En déduire que toute fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ est constante. (Théorème de Liouville).
Montrez le théorème de d'Alembert, c'est-à-dire que tout polynôme non constant s'annule sur $\mathbb{C}$ (appliquer le théorème de Liouville à $1/P$ si P ne s'annule pas).

$\bigoplus$ **Principe du maximum.** *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in H(U)$ et $a \in U$. Alors, ou bien f est constante dans U, ou bien tout voisinage de a contient un point b tel que $|f(b)| > |f(a)|$.*

$\bigoplus$ **Corollaire : Principe du maximum bis.** *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U, continue sur $\overline{U}$. Alors*

$$\sup_U |f| = \sup_{\partial U} |f|,$$

autrement dit le maximum du module de f est atteint sur le bord de U.

Exercice 6.3 Soit $f \in H(\mathbb{C})$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(z+i) = f(z+1)$. Montrez que f est constante.

Exercice 6.4 Soit $f \in H(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, Re $f(z) > 0$. Montrez que f est constante.

Lemme de Schwarz. *Soit $\Delta = D(0,1)$ et $f \in H(\Delta)$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall z \in \Delta$, $|f(z)| \leq 1$. Alors pour tout $z \in \Delta$, $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.*
De plus, s'il existe $z_0 \in \Delta \backslash \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que

$$\forall z \in \Delta, \qquad f(z) = \lambda z.$$

Autrement dit, f est une rotation.

$\mathbb{C} \bigoplus$ **Exercice 6.5.** Montrez le lemme de Schwarz.

$\mathbb{C}$ **Exercice 6.6. Une application du lemme de Schwarz : la formule de Jensen.**

1. Soit $a \in \Delta$. Montrer que $f_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ est un biholomorphisme de Δ dans Δ et que $f_a^{-1} = f_{-a}$.
2. Soient $0 < r < R$ et $f \in H(D(0,R))$ bornée par M sur $D(0,r)$, telle que $f(0) \neq 0$. Soient $z_1, \ldots, z_n$ les zéros de f (répétés suivant la multiplicité) dans $D(0,r)$. Montrez que

$$\frac{r^n |f(0)|}{|z_1| \cdots |z_n|} \leq M.$$

3. Soit $f \in H(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}^+$ et $B \in [0,1[$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq Ae^{B|z|}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 0$. Montrer que f est nulle. On pourra supposer que $f(0) \neq 0$, puis écrire la formule de Jensen avec $r = n$, puis prendre la racine $n-$ième.

Exercice 6.7. Inégalité de Borel-Carathéodory. Soit $R > 0$ et f une fonction holomorphe non constante au voisinage de $\overline{D}(0, R)$. On pose

$$A(r) = \sup_{|z|=r} \mathrm{Re}\, f(z) \qquad \text{pour } 0 \leq r \leq R.$$

1. Montrez que A est une fonction strictement croissante.
2. on suppose de plus que $f(0) = 0$. Vérifier que si $r > 0$, $A(r) > 0$ et que $|2A(r) - f(z)| \geq |f(z)|$ pour tout z tel que $|z| = r$.
3. On suppose encore $f(0) = 0$. On pose $g(z) = \dfrac{f(z)}{2A(R) - f(z)}$. Montrer que

$$\left| \frac{g(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{R}, \qquad \forall z \text{ tel que } 0 < |z| \leq R.$$

En déduire l'inégalité de Borel-Carathéodory :

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{R - |z|} A(R) \qquad \text{sur } D(0, R).$$

⊕ **Théorème d'holomorphie sous le signe somme dans le cas de l'intégration sur un intervalle compact.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : [a, b] \times U \to \mathbb{C}$ une fonction continue avec $f(t, \cdot)$ holomorphe. Alors*

$$F : U \ni z \mapsto \int_a^b f(t, z) dt$$

est holomorphe sur Ω et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F^{(k)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(t, z) dt.$$

$\bigoplus$ **Théorème d'holomorphie sous le signe somme dans le cas de l'intégrale de Lebesgue.** *Soient* (Ω, μ) *un espace mesuré, et* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$.
Soit $f : \Omega \times U \to \mathbb{C}$ *telle que :*
i. Pour tout $z \in U$, $t \mapsto f(t, z) \in L^1(\Omega)$
ii. Pour presque tout $t \in \Omega$, $z \mapsto f(t, z)$ *est holomorphe*
iii. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ *telle que, pour presque tout* $t \in \Omega$ *et pour tout* $z \in U$, $|f(t, z)| \leq g(t)$.
Alors l'application

$$F : z \mapsto \int_\Omega f(t, z) d\mu(t)$$

est holomorphe dans U, *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_\Omega \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(t, z) d\mu(t)$$

$\mathbb{C} \bigoplus$ **Exercice 6.8. Intégrales de Fresnel.**

1. Montrer que l'application F définie par

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt^2} dt$$

pour $z \in \mathbb{H}$ est holomorphe sur $\mathbb{H}$, et se prolonge continûment sur $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$ (pour le prolongement par continuité, on pourra d'abord décomposer le domaine d'intégration en $[0, 1]$ et $[1, +\infty]$, faire un changement de variable et intégrer par parties dans la deuxième intégrale).

2. Déterminer F dans $\mathbb{H}^+$ (utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme afin d'obtenir une équation différentielle simple vérifiée par F, ou bien déterminer la restriction de la fonction à $]0, +\infty[$).

3. Convergence et calcul des intégrales de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2\, dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \sin t^2\, dt.$$

⊕ **Théorème de Weierstraß.** *Soit U un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de $H(\Omega)$ qui converge uniformément sur tout compact de U. Alors $f \in H(U)$ et $(f_n')_n$ converge uniformément vers f' sur tout compact de U.*

Corollaire. *Sous les mêmes hypothèses, $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

⊕ **Remarque.** *Le résultat précédent est radicalement différent de la situation sur l'axe réel ! En effet, une suite de fonctions indéfiniment dérivables (des polynômes par exemple) peut converger uniformément vers une fonction nulle part dérivable !*

7. Singularités isolées des fonctions holomorphes.

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in H(U \setminus \{a\})$. On dit que f a une *singularité isolée au point a*.
Si f peut être définie en a de sorte que la fonction prolongée soit holomorphe, on dit que la singularité a est *artificielle*.

⊕ **Théorème (Riemann).** *Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in H(U \setminus \{a\})$ est bornée au voisinage de a, alors a est une singularité articielle.*

Exercice 7.1 Soient $f, g \in H(\mathbb{C})$ telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |g(z)|$. Que peut-on dire de f et g ?

$\bigoplus$ **Théorème de Casorati-Weierstraß.** *Si $a \in U$ et si $f \in H(U \setminus \{a\}$, l'un des trois cas suivants doit se produire :*
(a) f a une singularité artificielle en a
(b) Il existe des nombres complexes $c_1, \ldots, c_m$ où m est un entier positif et où $c_m \neq 0$ tels que

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

ait une singularité artificielle en a.
(c) Si $r > 0$ et $D(a,r) \subset U$, l'image $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ est dense dans le plan complexe.

Dans le cas (b), on dit que f a un *pôle d'ordre m* en a. La fonction

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

qui est un polynôme en $(z-a)^{-1}$est appelée la *partie principale* de f en a. Il est clair que dans cette situation $|f(z)| \to +\infty$ quand $z \to a$.
Dans le cas (c), on dit que f a une *singularité essentielle* en a.

Remarque. *La fonction f possède un pôle en a si et seulement si $|f(z)| \longrightarrow_{z \to a} +\infty$.*

En effet, si $|f(z)| \longrightarrow_{z \to a} +\infty$, alors $g(z) = 1/f(z)$ se prolonge en en une fonction holomorphe au voisinage de a. On en déduit le résultat suivant l'ordre de a pour g.

Exemple. *Un exemple d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ayant une singularité essentielle en 0 : $f(z) = \exp(1/z)$.*

Exercice 7.2 Soit $f \in H(\mathbb{C})$ telle que $|f(z)| \longrightarrow_{|z|\to+\infty} +\infty$. Montrer que f est un polynôme (considérer $f(1/z)$).

Exercice 7.3 Soit $f \in H(\mathbb{C})$ une application non constante. Montrez que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

$\oplus$ **Définition.** Soit U un ouvert, $a \in U$, et $f \in H(U \setminus \{a\})$. Supposons que f ait un pôle en a dont la partie principale est

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}.$$

Le nombre c_1 est appelé le *Résidu* de f en a et noté $\mathrm{Res}\,(f, a)$.

$\oplus$ **Théorème des résidus.** *Soit U un ouvert étoilé, $a_1, \dots, a_n$ des points distincts de U. Soit $f \in H(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$.*
Supposons que f ait un pôle en chaque points $a_1, \dots, a_k$.
Si γ est un chemin fermé dans U tel que $a_k \notin \gamma^*$ pour $k = 1, \dots, n$, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, a_k) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(a_k).$$

$\oplus$ **Corollaire.** *Soit U un ouvert, $\overline{D}(a, r)$ un disque fermé inclus dans U et $f \in H(U)$ tel que f ne s'annule pas sur $\partial D(a, r)$. Alors le nombre de zéros de f dans le disque $D(a, r)$ est égal à $\mathrm{Ind}_0 f(\partial D(a, r))$, le bord du disque étant parcouru dans le sens positif.*

8. Fonctions méromorphes.

Définition des fonctions méromorphes. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f sur U est dite *méromorphe* sur U si et seulement si il existe un ensemble S de points isolés dans U tel que $f \in H(U \setminus S)$ et tel que les éléments de S soient des pôles de f. En particulier, pour tout $\alpha \in S$, il existe un voisinage D_α ouvert et connexe dans U tel que

$$\exists g_\alpha, h_\alpha \in H(D_\alpha), \qquad \forall z \in D_\alpha \setminus \{\alpha\}, \qquad f(z) = \frac{g_\alpha(z)}{h_\alpha(z)}.$$

On note $M(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U.

On peut montrer (théorème de Mittag-Leffler, Rudin, p. 353) que tout fonction méromorphe sur U est en fait globalement le quotient de deux fonctions holomorphes sur U. De plus, les fonctions méromorphes forment un corps.

Séries de Laurent. On appelle *série de Laurent en $a \in \mathbb{C}$* une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z-a)^n,$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille de complexes indexée sur $\mathbb{Z}$. La série converge pour $z \in \mathbb{C}$ si chacune des deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ converge.

Le résidu d'une série de Laurent au point a est alors le coefficient a_{-1}. Si a est un pôle d'ordre m d'une fonction f, nous avons alors

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} [(z-a)^{m-1} f(z)].$$

Exercice 8.1. Soit $f(z) = \dfrac{z}{1+z+z^2}$.

a. Développer f en série entière au voisinage de 0
b. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?
c. Développer en série de Laurent au voisinage de tous les pôles.

9. Applications de la formule des Résidus.

$\bigoplus$ **Dénombrement des zéros et des pôles.** *Soit U un ouvert, $\overline{D}(a,r)$ un disque fermé inclus dans U et $f \in M(U)$ tel que f n'ayant ni zéro, ni pôle sur $\partial D(a,r)$. Alors la différence du nombre Z de zéros de f dans le disque $D(a,r)$ et du nombre de pôles de f dans le disque $D(a,r)$ est égale à* $\mathrm{Ind}_0 f(\partial D(a,r))$*, le bord du disque étant parcouru dans le sens positif.*

$\bigoplus$ **Théorème de l'application ouverte.** *Soit U un ouvert connexe et $f \in H(U)$ non constante. Alors f est ouverte, c'est-à-dire que l'image par f d'un ouvert est un ouvert.*

$\mathbb{C}$ $\bigoplus$ **Exercice 9.1. Théorème de Rouché.**

1. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins fermés, paramétrés par le même intervalle $[a,b]$ et tels que $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$, pour tout $t \in [a,b]$. Montrez que $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}\gamma_2(0)$.
2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f, g \in H(U)$ et $a \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(a,r) \subset U$. On suppose que

$$\forall z \in \partial D(a,r), \qquad |f(z) - g(z)| < |f(z).$$

Montrez que les fonctions f et g ont le même nombre de zéros dans $D(a,r)$ (à condition de les compter suivant leur ordre de multiplicité).

3. Application : Montrez qu'un polynôme de degré n a exactement n racines dans $\mathbb{C}$.
4. Autre application : Montrez que les 7 racines de $P(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ se trouvent dans la couronne $\{z \in \mathbb{C},\ 1 < |z| < 2\}$.

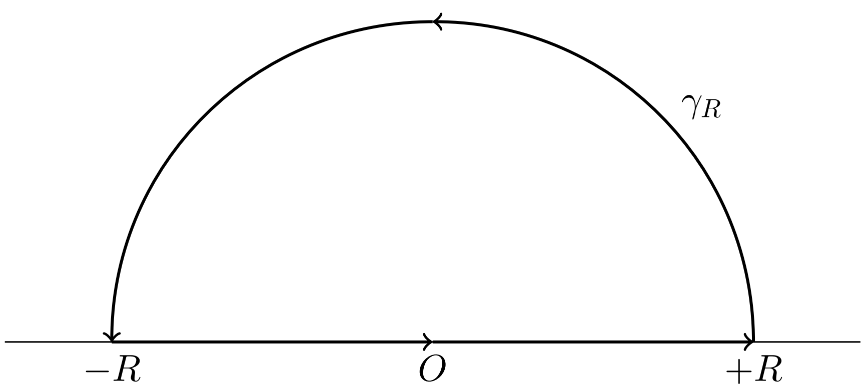
Calcul d'intégrales sur $\mathbb{R}$ de fractions rationnelles. *Soit à calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

où P et Q sont deux polynômes, Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $d^o(Q) \geq d^o(P) + 2$.
On pose $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ que l'on intègre sur le contour γ_R formé du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle de rayon R joignant R à $-R$ dans le sens direct dans le demi-plan supérieur, et nous faisons tendre R vers $+\infty$. Nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum \operatorname{Res}(f, \operatorname{Im} z > 0).$$

La figure suivante illustre la méthode précédente :



Exercice 9.2. Montrez que

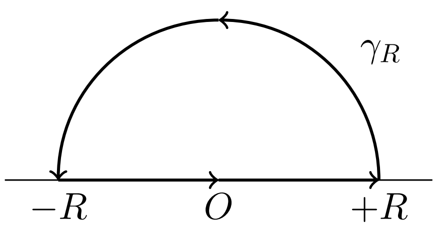
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{16}.$$

Calcul d'intégrales sur $\mathbb{R}$ du produit d'une fraction rationnelle par une exponentielle complexe. *Soit à calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{itx} dx$$

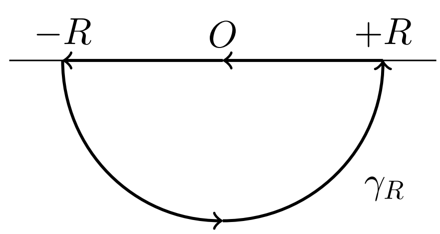
où P et Q sont deux polynômes, Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $d^o(Q) \geq d^o(P) + 1$.
On pose $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{itz}$, et si $t > 0$, on intègre sur le contour γ_R formé du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle de rayon R joignant R à $-R$ dans le sens direct dans le demi-plan supérieur, et nous faisons tendre R vers $+\infty$. Si $t < 0$, nous prenons le symétrique par rapport à l'axe des x du contour précédent. Nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{itx} dx = \sum \mathrm{Res}\,(f, 1/2 \text{ plan choisi}).$$



$t > 0$

$t < 0$



Exercice 9.3. Montrez que

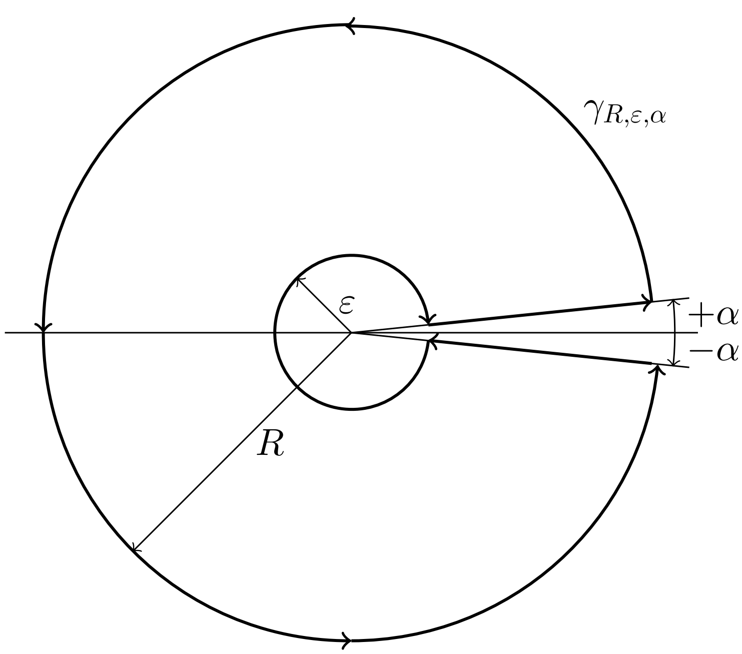
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}.$$

⊕ **Calcul d'intégrales sur $\mathbb{R}$ du produit d'une fraction rationnelle par une puissance.** *Soit à calculer*

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{s-1} dx$$

où P et Q sont deux polynômes, $s \in]0,1[$, Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $d^o(Q) \geq d^o(P)+1$.
On pose $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{(s-1)\operatorname{Ln} z}$, où Ln est la représentation du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. On intègre sur le contour $\gamma_{R,\varepsilon,\alpha}$ formé du segment $[\varepsilon e^{i\alpha}, Re^{i\alpha}]$, de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon R joignant les points $Re^{i\alpha}$ et $Re^{-i\alpha}$ dans le sens direct, du segment $[Re^{-i\alpha}, \varepsilon e^{-i\alpha}]$ et de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon ε joignant les points $\varepsilon e^{-i\alpha}$ à $\varepsilon e^{i\alpha}$ dans le sens indirect, puis nous faisons tendre ε et α vers 0 et R vers $+\infty$. Nous avons

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{s-1} dx = -\frac{\pi e^{-i\pi s}}{\sin \pi s} \sum \operatorname{Res}(f, \mathbb{C}).$$



Exercice 9.4. Montrez que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda} \qquad \text{pour } 0 < \lambda < 1.$$

$\mathbb{C} \bigoplus$ **Exercice 9.5.** Montrez que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

On pourra, pour $0 < \varepsilon < R$ considérer le chemin $\gamma_{R,\varepsilon}$ constitué de $[-R, -\varepsilon]$, du demi cercle orienté dans le demi-plan supérieur dans le sens indirect joignant $-\varepsilon$ à ε, du segment $[\varepsilon, R]$, du demi-cercle orienté dans le demi-plan supérieur dans le sens direct joignant R à $-R$, puis faire tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$.

Exercice 9.6. Montrez que, pour a réel, on a :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\text{sh } x} dx = \frac{\pi}{2} \text{ th } \frac{\pi a}{2}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{x \cos ax}{\text{sh } x} dx = \frac{\pi^2 e^{\pi a}}{(e^{\pi a}+1)^2}.$$

(intégrer le long d'un rectangle ayant pour sommets $\pm R$ et $\pm R + 2\pi$ en évitant les points 0 et $2\pi i$ par des petits demi-cercles).

$\mathbb{C} \bigoplus$ **Exercice 9.7.** Calculer les intégrales de Fresnel en intégrant la fonction $f(z) = e^{-z^2}$ sur le chemin formé du segment $[0, R]$, de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon R donné par $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ et le segment $[0, Re^{i\pi/4}]$.

10. Compléments.

Le théorème des trois droites. Application à l'interpolation. ([QZ], [An]) [(D : 1, 2, 7, 8, 34, 39, 40, 45,)] On

note, pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, $\mathbb{H}_{a,b} = \{z \in \mathbb{C},\ a < \operatorname{Re} z < b\}$. Soit $f \in H(\mathbb{H}_{a,b}) \cap C(\mathbb{H}_{a,b})$ telle que $|f(z)| \leq C$ dans $\mathbb{H}_{a,b}$.
On pose, pour $a < x < b$,

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x+iy)|.$$

On se propose de montrer que :

$$\forall x \in]a, b[, \qquad M^{b-a}(x) \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}.$$

1. Supposons $M(a) = M(b) = 1$. Utiliser le théorème de l'application ouverte pour montrer directement que $|f| \leq 1$.
2. Posons
$$g(z) = M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} M(b)^{\frac{z-a}{b-a}}.$$
Appliquer le résultat de la question 1 à $f(z)/g(z)$ et déduire le théorème des trois droites.
3. Application à l'interpolation. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et λ la mesure de Lebesgue. Soit $T : L^1(U) \to L^\infty(\Omega)$ une application linéaire continue de norme M. On suppose de plus que $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ de manière continue et de norme 1. On se propose de montrer que $T : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ pour tout $1 < p < 2$ et que $\|Tf\|_q \leq M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_p$ et où q est le conjugué de p, c'est-à-dire que q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a. Soit $h \in L^q$. Montrez que $\|h\|_q \leq M^{\frac{2-p}{p}}$ si et seulement si pour tout $g \in L^p$ telle que $\|g\|_{L^p} = 1$, on a

$$\left| \int_\Omega hg d\lambda \right| \leq M^{\frac{2-p}{p}}.$$

Il pourra pour cela être utile de prendre $g = \overline{h}|h|^{q-2}/\|f\|_q^{q-1}$.
Montrez que $\|h\|_q \leq M^{\frac{2-p}{p}}$ si et seulement si pour tout $g \in L^p$ simple telle que $\|g\|_{L^p} = 1$, on a

$$\left| \int_\Omega hg d\lambda \right| \leq M^{\frac{2-p}{p}}.$$

b. Montrer qu'il suffit de prouver que

$$\left| \int_\Omega (Tf) g d\lambda \right| \leq M^{\frac{2-p}{p}}$$

pour toutes fonctions simples f et g telles que $\|f\|_p = \|g\|_p \leq 1$.
c. On suppose f et g simples fixées vérifiant les conditions précédentes. On pose

$$\phi(z) = \int_\Omega |g|^{zp-1} g T(|f|^{zp-1} f) d\lambda.$$

Montrer que ϕ est une fonction entière. Appliquer le théorème des trois droites avec $a = 1/2$ et $b = 1$, puis conclure.

4. Montrer que la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ se prolonge en une application linéaire continue de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})$ si $1 < p < 2$ et q est le conjugué de p.

Fonction Γ ([Go], p.290 et p.260). [**(D: 7, 29, 35, 39, 41, 45, 46, 47) Extraire les points à traiter en fonction de la leçon à illustrer.**]
Soit la fonction *gamma* définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad \text{pour } x > 0.$$

1. Montrer que Γ est bien définie, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que Γ est convexe sur $\mathbb{R}_*^+$. Montrer que Γ est logarithmiquement convexe (*i.e.* $\log \Gamma$ est convexe. On pourra pour cela montrer qu'une fonction F est logarithmiquement convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si $F'^2 \leq FF''$, et utiliser l'inégalité de Cauchy -Schwarz).
3. Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

4. Donner un équivalent de Γ en 0+ et tracer son graphe.

5. Montrer que Γ se prolonge holomorphiquement au demi-plan $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ \text{Re}\ z > 0\}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall z \in \mathbb{H}^+, \qquad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}.$$

   En déduire que Γ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.
   Autre méthode : Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{H}^+, \qquad \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

   En déduire que Γ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ et les résidus de Γ aux points $-n$ quand $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

   En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

7. Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
8. Démontrer la formule de Weierstraß:

$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}\right],$$

   où γ désigne la constante d'Euler définie par

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right).$$

9. Démontrer la *formule de duplication* :

$$\forall x > 0, \qquad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x).$$

(Utiliser le résultat de la question 6). Peut-on prolonger cette identité sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$?

10. *Développement Eulérien de* sin.

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On désigne par f_α l'application continue, C^1 par morceaux et $2\pi-$périodique définie par :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad f_\alpha(t) = \cos \alpha t.$$

Calculer la série de Fourier de f_α. En déduire que

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad \cos \alpha t = \frac{\sin \alpha t}{\alpha \pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nt.$$

puis que

$$\operatorname{cotan} \alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)},$$

et enfin que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \qquad \operatorname{cotan} t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

b. Soit $x \in]0, \pi[$ et

$$f : [0, x] \ni t \mapsto \operatorname{cotan} t - \frac{1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \in \mathbb{R}.$$

En intégrant cette fonction f sur l'intervalle $[0, x]$, et en prenant l'exponentielle des deux membres de l'égalité obtenue, montrez que :

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \qquad \sin t = t \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right).$$

c. Montrez que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

11. *Formule des compléments.* Montrer que

$$\forall x \in]0,1[, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi},$$

puis que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \qquad \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

12. *Dérivée logarithmique de* Γ. Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}.$$

En déduire, après avoir vérifié la convergence de l'intégrale, que

$$\int_0^{\infty} (\ln t) e^{-t} dt = -\gamma.$$

13. Montrez que, pour $x > 0$,

$$(\ln \Gamma)''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

14. *Première formule de Binet.* [AAR]
a. *Formule de Dirichlet.* On se propose de montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{z} \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+z)^x}\right) dz.$$

Montrer que
$$\int_0^\infty \frac{e^z - e^{-sz}}{z} dz = \ln s. \qquad (*)$$
En considérant l'intégrale double
$$\int_{z=0}^\infty \int_{s=0}^\infty s^{x-1} \frac{e^{-s-z} - e^{-s(1+z)}}{z} ds\, dz,$$
qui vaut d'une part $\Gamma'(x)$ et d'autre part
$$\Gamma(x) \int_0^\infty \frac{1}{z} \left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x} \right) dz,$$
déduire le résultat.

b. *Formule de Gauss.* Montrer que
$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \lim_{\delta \to 0+} \left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz - \int_\delta^\infty \frac{dz}{z(1+z)^x} \right)$$
$$= \lim_{\delta \to 0+} \left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz - \int_{\ln(1+\delta)}^\infty \frac{e^{-tx} dt}{1 - e^{-t}} \right)$$
$$= \lim_{\delta \to 0+} \left(\int_\delta^{\ln(1+\delta)} \frac{e^{-z}}{z} dz + \int_{\ln(1+\delta)}^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}} \right) dt \right)$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1 - e^{-z}} \right) dz.$$

c. Montrer en utilisant la formule précédente et $(*)$ que
$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{2x} + \ln x - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) e^{-tx} dt.$$

En déduire que

$$\forall x > 0, \qquad \ln\Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x - x + 1 + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}dt,$$

puis que

$$\forall x > 0, \qquad \ln\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + 1 + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{e^{-tx}}{t}dt - I$$

où

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{e^{-t}}{t}dt$$

En utilisant la formule de Stirling, montrez que $I = 1 - \frac{1}{2}\ln(2\pi)$. En déduire la *première formule de Binet* :

$$\forall x > 0, \qquad \ln\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{e^{-tx}}{t}dt.$$

Prolongement holomorphe de $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^\alpha}$ à $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ pour $\alpha > 0$. ([QZ], p.57) [(D: 7, 35, 39, 41, 43, 45, 47)] Soit $\alpha > 0$. On se propose de montrer que la série entière $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^\alpha}$ de rayon de convergence égal à 1 se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$.

1. Montrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-nt}dt$.
2. Montrez que, pour tout z dans $\mathbb{C}$ de module strictement plus petit que 1,
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^\alpha} = \frac{z}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1 - ze^{-t}}dt.$$

3. Conclure.

Formule sommatoire de Poisson. ([QZ], p.93, [CFM] p.98, [Go] p.269) ([D: 35, 39, 40, 41, 46, 47]) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et de classe C^1 par morceaux vérifiant

$$\max(|f(x)|, |f'(x)|) = \mathcal{O}(1/x^\alpha) \qquad \text{quand } |x| \to +\infty$$

où $\alpha > 1$. On se propose de montrer que, sous ces conditions, si $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}dt$, nous avons la formule suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2\pi n).$$

1. Montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ converge uniformément sur tout intervalle compact vers une fonction $F(x)$ continue de classe C^1 par morceaux et $1-$périodique.
2. Calculez le développement en série de Fourier de F. Conclure.
3. Applications ([QZ], p.116). Soit $a > 0$. Montrez que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a.$$

(appliquer la formule de poisson à $f(x) = e^{-2\pi a|x|}$).
([Go], p.269) Montrer que

$$\forall s > 0, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2/s}.$$

(appliquer la formule de Poisson à la fonction $f(x) = e^{-ax^2}$; il sera utile d'introduire la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2+zt}dt$, montrer qu'elle est holomorphe, et la déterminer sur $\mathbb{R}$ grâce à un changement de variable).

On note, pour $x \in]-1,1[$, $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}$. Cette série entière est appelée la fonction thêta de Jacobi. Donner un équivalent lorsque $x \to 1$ de $\Theta(x)$.

Prolongement holomorphe de la fonction ζ de Riemann. ([QZ] p.28, [Go] p.278) ([D: 7, 30, 35, 39, 41, 45, 47]) On admet ici l'identité fonctionnelle (corollaire de la formule sommatoire de Poisson)

$$\forall t > 0, \qquad \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right), \qquad \text{où } \theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que Re $s > 1$, on note

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Cette fonction est appelée *Fonction zêta de Riemann.*

1. Montrez que, si $s \in \mathbb{C}$ est tel que Re $s > 1$, alors $\zeta(s)$ est bien défini.
   Montrez que
   $$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \pi^{\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1}dy.$$
2. On considère pour $t > 0$, la fonction
   $$\widetilde{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$
   Montrez que :
   $$\forall t \geq 1, \qquad \widetilde{\theta}(t) \leq \frac{e^{-\pi t}}{1-e^{-\pi}}$$

et que

$$\forall t > 0, \qquad \widetilde{\theta}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\widetilde{\theta}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}.$$

Montrez que

$$\int_0^1 \widetilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy = \int_1^\infty \widetilde{\theta}(u) u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} du + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

En déduire que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) + \psi(s)$$

où ψ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

3. En déduire que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, nulle aux entiers $-2, -4, -6, \ldots$ et admettant un pôle simple en 1.
4. Déduire de la question 2 que

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \qquad \zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s).$$

5. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers premiers. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$, Re $s > 1$ implique

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

En déduire que ζ n'a pas de zéro sur $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1\}$. Déduire de la question précédente que tous les zéros de la fonction ζ sont de deux types : les entiers -2, -4, -6, ... et les autres zéros qui sont dans la bande $\{z \in \mathbb{C},\ 0 \leq \mathrm{Re}\, s \leq 1\}$.

6. Montrer que, pour $s \in \mathbb{R}$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1) \qquad \text{quand } s \to 1.$$

Montrez que

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

Noyau de Bergman. ([Roos], p.232). ([D: 1, 5, 13, 34, 35, 39, 41, 43, 45, 46, 47]) On note Δ le disque unité de $\mathbb{C}$ et λ la mesure de Lebesgue sur Δ divisée par π (ce qui nous donne $\lambda(\Delta) = 1$.) Pour $1 \le p \le +\infty$, on définit l'espace de Bergman

$$H^p(\Delta) = L^p(\Delta) \cap \mathcal{H}(\Delta)$$

muni de la norme

$$\|g\|_p = \left(\int_\Delta |g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrez que si $g \in \mathcal{H}(\varepsilon\Delta)$ alors $g(0) = \dfrac{4}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_{\frac{\varepsilon}{2}\Delta} g d\lambda$.
2. Soit K un compact de Δ et soit $\delta = d(K, \partial\Delta) > 0$. Montrer l'existence d'une constante C_p ne dépendant que de p et indépendante de K telle que pour toute fonction $f \in H^p(\Delta)$,

$$\sup_K |f| \le \frac{C_p}{\delta^2}\|f\|_p.$$

   En déduire que H^p est un espace de Banach.
3. On suppose maintenant que $p = 2$. Montrez que :

$$\forall f \in \mathbb{H}^2(\Delta), \qquad \forall z \in \Delta, \qquad |f(z)| \le \frac{4}{(1-|z|)^2}\|f\|_2.$$

   Déduire du théorème de représentation de Riesz que, pour tout $z \in \Delta$, il existe un unique $K_z \in H^2(\Delta)$ tel que

$$\forall f \in H^2(\Delta), \qquad f(z) = \int_\Delta f\overline{K_z} d\lambda.$$

4. On pose, pour $z, w \in \Delta$, $K(z,w) = \overline{K_z(w)}$. Soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $H^2(\Delta)$. Montrez que
$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi_k(z)}\varphi_k(w)$$
converge uniformément sur tout compact de Δ vers $K(z,w)$.
5. Montrez qu'une fonction $f : \Delta \to \mathbb{C}$ appartient à $H^2(\Delta)$ si et seulement si son développement en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vérifie
$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} > +\infty.$$
En déduire que la famille $\varphi_n(z) = \sqrt{n+1}\, z^n$ forme une base hilbertienne de $H^2(\Delta)$ et que
$$K(z,w) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2}.$$
Remarque. Le noyau de Bergman possède aussi une expression explicite si on ne se place plus dans Δ mais dans un domaine simplement connexe pour lequel on connaît une application conforme dans Δ. Voir [Roos]

Bibliographie.

[AAR] Andrews G., Askey R. and Roy R., Special functions, Encyclopedia of Maths and its App., 71, Cambridge

[An] Andersson M., Topics in complex analysis, Springer.

[CFM] Chambert-Loir A., Fermigier S. et Maillot V., Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1, Masson.

[Go] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Ellipses.

[Po] A. Pommellet, *Agrégation de Mathématiques, Cours d'Analyse*, Ellipses,1994.

[QZ] H. Queffelec, C. Zuily, Analyse pour l'agrégation.

[Roos] G. Roos, Analyse et Géométrie, Dunod.

[Ru] Rudin W., Analyse réelle et complexe, Masson, sixième tirage.