

Introduction à l'analyse

PLANCHE 1 - FONCTIONS USUELLES

Fonctions trigonométriques. (Exercices 1 à 4 à préparer pour le mardi 18 septembre).

Exercice 1 Résoudre les équations $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ et $\tan 3x = \tan x$

Exercice 2 Montrer, pour certaines valeurs de x qui seront précisées, que

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Exercice 3 1. En utilisant le produit scalaire dans le plan euclidien, montrez que

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

En déduire $\cos(x + y)$ en fonction de $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$ et $\sin y$.

2. Calculer $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ en fonction de $\sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels on a $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$.

3. Calculer $\sin(x - y)$ et $\sin(x + y)$ en fonction de $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$ et $\sin y$.

4. Calculer $\tan(x + y)$ et $\tan(x - y)$ en fonction de $\tan x$ et $\tan y$. Préciser les valeurs de x et y qui conviennent.

5. Pour tout réel x , établir trois expressions de $\cos 2x$. En déduire des formules de linéarisation de $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$. En précisant les valeurs de x qui conviennent, établir les expressions de $\sin 2x$ et $\tan 2x$.

6. Montrer que, pour des valeurs de x que l'on précisera, si $t = \tan \frac{x}{2}$,

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

7. Simplifier $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi - x)$ et $\tan(\pi - x)$ (pour la dernière expressions, préciser les valeurs de x). De même pour $\cos(\pi + x)$, $\sin(\pi + x)$ et $\tan(\pi + x)$.

8. Montrer les formules

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \end{aligned}$$

Pour la première identité, on pourra écrire $p = u + v$ et $q = u - v$, appliquer les formules de duplication $\cos(u \pm v)$, puis revenir à p et q . Faire la même chose pour les formules suivantes.

Exercice 4 Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan complexe, soit M le point d'affixe e^{ix} . On note A le point d'affixe 1, B le projeté orthogonal de M sur l'axe des x et C le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$. En comparant l'aire du triangle OBM , l'aire de la portion de disque OAM et l'aire du triangle OAC , montrez que

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

En déduire la limite quand x tend vers 0 de $\frac{\sin x}{x}$.

Montrer que les fonctions $\sin$, $\cos$ et $\tan$ sont dérivables et calculer les dérivées.

Tracer leur graphe.

Fonctions trigonométriques réciproques.

Exercice 5 Rappeler les définitions de $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ et $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Résoudre les équations $\cos x = a$, $\sin x = a$ et $\tan x = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 Montrer :

$$\forall x \in]0, 1], \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x \in]0, 1], 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Fonction $\ln$ et fonction $\exp$.

Exercice 7 En étudiant deux fonctions, montrez l'inégalité suivante, due à Neper :

$$\forall x > -1, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 8 1. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 10^x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est bijective. En écrivant que $f(x) = \exp(x \ln 10)$, expliciter f^{-1} que l'on note $\log$.

2. Pour tout réel x , on note $E(x)$ ou encore $[x]$ et on appelle "partie entière" de x le plus grand entier relatif n tel que $n \leq x$.

Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $[x] \leq x < [x] + 1$.

Calculer $[\pi]$, $[\sqrt{2}]$, $[-\pi]$.

Etudiez la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto [x] \in \mathbb{Z}$ et tracer son graphe. Cette fonction est-elle continue ? continue à droite ? continue à gauche ?

3. Si n est un entier naturel et $C(n)$ désigne le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n , exprimer $C(n)$ en fonction de $\log n$ et de la partie entière.

4. Application numérique : calculer le nombre de chiffres de $9^{(9^9)}$.

Exercice 9 Montrez que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

(faire une récurrence et intégrer).

Montrez que

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

En déduire que

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln x = 0.$$

Fonction exponentielle complexe.

Exercice 10 On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Dédurre de la formule $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$ les formules de duplication pour $\cos$ et $\sin$ obtenues dans l'exercice 3.

Exercice 11 Soient $A, B \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $r \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A \cos x + B \sin x = r \cos(x - \varphi).$$

Exercice 12 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, simplifier

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx, \quad \sin x + \cdots + \sin nx.$$

Fonctions hyperboliques.

Exercice 13 On définit les fonctions ch , sh et th (appelées fonctions hyperboliques) par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{ch } t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \text{sh } t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \text{th } t = \frac{\text{sh } t}{\text{ch } t}.$$

Etudiez les fonctions ch , sh et th et tracer leur courbe représentative dans un repère orthonormé. Montrez que ces fonctions sont dérivables et calculez les dérivées.

Montrez que, pour tout réel x , $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

Montrez des formules analogues aux formules prouvées dans l'exercice 3.

Définir des fonctions réciproques (notées $\arg \text{ch}$, $\arg \text{sh}$ et $\arg \text{th}$). On pourra les expliciter.

Calculer les dérivées de ces fonctions réciproques.