Université d'Aix-Marseille 2012–20123

Introduction à l'analyse

Planche 2 - Equations différentielles.

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'(x) = 3y(x)$ avec $y(0) = 3$;

b) $y'(x) + \pi y(x) = 0$ avec $y(0) = 0$;

c) $3y'(x) = y(x)$ avec $y(1) = -1$.

Exercice 2 On sait que l'accroissement d'une population donnée est proportionnel à cette population. On sait de plus que cette population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 3 On considère l'équation différentielle (E) $\quad y' + y = \cos x \quad$ et l'équation différentielle sans second membre (e) $\quad y' + y = 0$.

a) résoudre (e).

b) trouver une solution particulière de (E).

c) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 4 On considère l'équation différentielle (E) $\quad y' + 3y = 2e^{-x} \quad$ et l'équation différentielle sans second membre (e) $\quad y' + 3y = 0$.

a) résoudre (e).

b) trouver une solution particulière de (E).

c) En déduire les solutions de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 5 Refaire les deux exercices précédents mais en appliquant la méthode de variation de la constante.

Exercice 6 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

b) $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$.

c) $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$.

Exercice 7 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(x) - y(x) = e^{2x}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$.

b) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{4x}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$.

c) $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ sachant que $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 8 Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) + y'(x) = 1 + x^2.$$

Exercice 9 On décrit ci-dessous 5 processus physiques et on donne 6 équations différentielles, parmi lesquelles se cachent celles associées aux processus décrits.

1) Associez à chaque processus son équation, en expliquant votre choix

2) Résolvez les équations, et dessinez les solutions.

3) Interpréter en s'aidant de la description des phénomènes physiques l'évolution dans le temps de la quantité physique intéressante, notée X dans tous les cas.

Voici la liste des processus :

Processus A : une certaine proportion $X(t)$ du carbone d'un os enfoui sous terre est radioactive. A chaque instant, la désintégration de la partie radio-active est proportionnelle à la quantité.

Processus B : Des bactéries vivantes sont dans un bol avec une solution nutritive, et un médicament qui les attaque. Elles mangent et se multiplient, mais sont aussi tuées par le médicament, dont chaque molécule, une fois sa victime achevée, se déplace vers une autre cible. $X(t)$ est le nombre de bactéries vivantes à l'instant t.

Processus C : Des élastiques sont attachés sur une balle, en deux points diamétralement opposés. Les élastiques sont tendus et leur autre extrémité est attachée pour l'un au plafond, pour l'autre au sol. On descend légèrement la balle par rapport à sa position d'équilibre, on attend un instant, puis on la lâche. Son déplacement par rapport à l'équilibre est $X(t)$.

Processus D : Une pierre de curling est lancée sur une patinoire. La distance parcourue depuis le point de départ est $X(t)$. Les forces de friction amènent petit à petit la pierre au repos.

Processus E : L'eau est pompée d'un lac à vitesse constante. Le volume d'eau dans le lac est $X(t)$.

Et la liste des équations, avec des constantes a et b positives :

$$\text{équation 1 : } \frac{d^2X}{dt^2} = -aX + b \qquad \text{équation 2 : } \frac{d^2X}{dt^2} = -aX$$

$$\text{équation 3 : } \frac{dX}{dt} = -aX \qquad \text{équation 2 : } \frac{dX}{dt} = -b + aX$$

$$\text{équation 4 : } \frac{d^2X}{dt^2} = -a\frac{dX}{dt} \qquad \text{équation 5 : } \frac{dX}{dt} = -a$$

Exercice 10 Trouver toutes les appications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = f(1 - x).$$

Exercice 11 On considère l'équation différentielle (E) $\qquad y'(x) - 2xy(x) = x$

et l'équation sans second membre associée (e) $\qquad y'(x) - 2xy(x) = 0.$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(x) = C$ est-elle solution de (E) ?

b) Résoudre (e) ; puis en déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 12 On considère l'équation différentielle :

$$xy'(x) + (x-1)y(x) = e^{-x}$$

1. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = ae^{-x}$.
2. Trouver la solution générale de l'équation différentielle.
3. Trouver les solutions de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = -1$ puis vérifiant $y(1) = 0$ et enfin vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 13 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'(x) + y(x)\tan(x) = \sin(2x)$;

b) $2xy'(x) + y(x) = x^3$;

c) $(1+x^2)y'(x) + xy(x) - 2x = 0$;

d) $x(x-1)y'(x) - (2x-1)y(x) + x^2 = 0$.

Exercice 14 Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que le segment de chaque tangente compris entre le point de tangence et l'axe des abscisses est divisé en deux parties égales par le point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

Exercice 15 On se propose de déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Soit F une primitive de f. Montrez que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad F(x+y) - F(x) = yf(x) + F(y) - F(0).$$

(intégrer par rapport à y). En déduire que f est dérivable.

2. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = f'(x).$$

En déduire que f' est constante.

3. Conclure.

Exercice 16 En s'inspirant de l'exercice précédent, trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x)f(y)$$