Université d'Aix-Marseille 2012–20123

Introduction à l'analyse

PLANCHE 3 - LOGIQUE. SUITES

Logique.

Exercice 1 Montrer, en utilisant les tables de vérité, que

$$\text{non}\,(A\,\text{et}\,B) = (\text{ non}\,A)\,\text{ou}\,(\text{ non}\,B) \qquad \text{et} \qquad \text{non}\,(A\,\text{ou}\,B) = (\text{ non}\,A)\,\text{et}\,(\text{ non}\,B).$$

Exercice 2 Montrer de même que $(A \Longrightarrow B) = (\text{ non}\,A)\,\text{ou}\,B$.

Exercice 3 Que vaut $\text{non}\,(A \Longrightarrow B)$?

Exercice 4 Montrer que $(A\,\text{ou}\,B)\,\text{et}\,C = (A\,\text{et}\,C)\,\text{ou}\,(B\,\text{et}\,C)$ et que $(A\,\text{et}\,B)\,\text{ou}\,C = (A\,\text{ou}\,C)\,\text{et}\,(B\,\text{ou}\,C)$.

Exercice 5 Que vaut $\text{non}\,(A \Longleftrightarrow B)$?

Exercice 6 Montrer que $[(\text{ non}\,B) \Longrightarrow (\text{ non}\,A)] = (A \Longrightarrow B)$.

Exercice 7 Les énoncés ci-dessous sont-ils vrais ou faux ? (On justifiera).

$$\exists x \in \mathbb{N},\, x^2 > 5$$
$$\forall x \in \mathbb{N},\, x^2 > 5$$
$$\forall x \in \mathbb{N},\, \exists y \in \mathbb{N},\, y > x^2$$
$$\exists y \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{N},\, y > x^2$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\, \forall z \in \mathbb{R},\, \exists y \in \mathbb{R},\, x < y < z$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\, \forall z \in \mathbb{R},\, x < z \Rightarrow \big(\exists y \in \mathbb{R},\, x < y < z\big)$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\, \exists y \in \mathbb{R},\, x + y = 1$$
$$\exists y \in \mathbb{R},\, \forall x \in \mathbb{R},\, x + y = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N},\, n > N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0$$
$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N},\, n > N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0$$

Prendre la négation de ces énoncés.

Exercice 8 Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est injective lorsque

$$\forall x \in E, \qquad \forall x' \in E \qquad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

On dit que f est surjective lorsque

$$\forall y \in F, \qquad \exists x \in E \qquad y = f(x).$$

On dit que f est bijective lorsque f est injective et surjective.

Montrer que f est surjective si et seulement si

$$\forall y \in F, \qquad \exists ! x \in E \qquad y = f(x).$$

Exprimer, de manière mathématique, le fait que f ne soit pas injective, le fait que f ne soit pas surjective, le fait que f ne soit pas bijective.

Relations d'ordre. Réels.

Exercice 9 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Exprimer le fait que :

- a n'est pas un majorant de A.

- a n'est pas un minorant de A.

- a n'est pas le plus grand élément de A

- a n'est pas le plus petit élément de A.

Exercice 10 On admet le fait que toute partie majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $[x] = E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $[x] \leq x < [x]+1$.

Montrez que, si $p \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \exists ! q \in \mathbb{Z}, \qquad \exists ! r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, \qquad n = pq + r$$

(division euclidienne de n par p). Pour l'existence, on prendra $q = [n/p]$.

Exercice 11 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Exprimer le fait que :

- a n'est pas la borne supérieure de A.

- a n'est pas la borne inférieure de A.

Exercice 12 Mettre sous forme irréductible p/q avec $p, q \in \mathbb{N}$:

$$0,11\underline{1}\ldots \qquad 0,23\underline{23}\ldots \qquad 0,142857\underline{142857}\ldots \qquad 0,99\underline{9}\ldots$$

Quel est le développement décimal de

$$\frac{123\,456\,789}{3^4 \times 12\,345\,679}$$

Exercice 13

1. Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, avec B majorée et $A \subset B$. Montrer que A est majorée et que sup(A) $\leq$ sup(B).
2. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Soit $A + B = \{x + y,\ (x, y) \in A \times B\}$. Que peut-on dire de $\sup(A \cup B)$? de $\sup(A + B)$?

Exercice 14 Soient E un ensemble et f, g deux applications de E dans $\mathbb{R}$ telles que $f(E)$ et $g(E)$ soient des parties majorées de $\mathbb{R}$. On note $\sup f$ la borne supérieure de l'ensemble $f(E)$. Que peut-on dire de $\sup(f + g)$?

Exercice 15 Dire si les ensembles suivants admettent majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure plus grand élément ou plus petit élément.

1. $[-1, 1[\cup\{2\}$
2. $\left\{\frac{1}{x}|x \in \mathbb{R}_+^\star\right\}$
3. $\left\{1 - \frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}_+^\star\right\}$

Suites.

Exercice 16 Exprimer le fait qu'une suite de réels ne converge pas vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Exprimer le fait qu'une suite de réels ne converge pas.

Exercice 17 Montrer directement que la suite $(1/n)_n$ tend vers 0. Idem pour $(1/\sqrt{n})_n$.

Exercice 18 Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_n$ est stationnaire si et seulement si

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N \Longrightarrow u_n = u_N.$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 19 Soit $(u_n)_n$ une suite d'entiers relatifs qui converge. Montrez que $(u_n)_n$ est stationnaire.

Exercice 20 Soit (u_n) une suite de nombres complexes. Montrez que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $(|u_n - \ell|)_n$ converge vers 0.

Exercice 21 (Suite géométrique)
Déterminer la convergence ou la divergence de la suite

$$u_n := a^n\,, \quad a \in \mathbb{R}\,,$$

en fonction de la valeur de a.

Même question si $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 22 Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels telle que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 1.$$

Montrez que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 23 Soit $(u_n)_n$ la suite, définie par

$$u_0 := 5\,, \quad u_{n+1} := 2u_n - 3\,.$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 24 Soient $(u_n)_n = (\sqrt{n})_n$ et $(v_n)_n = (\ln n)_n$. Montrer que u et v tendent vers $+\infty$ et que $\lim(u_{n+1} - u_n) = \lim(v_{n+1} - v_n) = 0$.

En conclure que $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ n'est pas une condition suffisante pour que $(a_n)_n$ soit convergente.

Exercice 25 Soit A un partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$m = \sup A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} m \text{ est un majorant de } A \\ \textit{et} \\ \text{il existe une suite d'élément de } A \text{ qui converge vers } m. \end{array} \right.$$

Exercice 26 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Montrer les résultats suivants :

a. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_n$ converge vers la limite commune.

b. Si $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent vers l, l', l'', alors $l = l' = l''$ et $(u_n)_n$ converge.

Exercice 27 Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites définies par :

$a_0 = a$, $b_0 = b$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

a. Démontrer que $(a_n)_n$ est bien définie et croissante.

b. Prouver que $(b_n)_n$ est décroissante.

c. Démontrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes et que $\lim(a_n) = \lim(b_n)$. (*Cette limite commune est appelé moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b.*)

Exercice 28 On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Montrer qu'elles sont adjacentes. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)_n$ converge.

Exercice 29 Lemme de Césaro

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrez que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$