

Géométrie Différentielle.

1. Définition des courbes paramétrées.

Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^n$ avec $n = 2$ ou $n = 3$. On appelle *courbe paramétrée de classe C^k* dans $\mathbb{R}^n$ avec $n = 2$ ou $n = 3$ un couple (I, f) formé d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une application f de classe C^k de I dans $\mathbb{R}^n$. Si $n = 2$, on dit que c'est une *courbe plane*, tandis que si $n = 3$, on dit que c'est une *courbe gauche*.

On dit que deux courbes paramétrées $C^k(I_1, f_1)$ et (I_2, f_2) sont équivalentes si et seulement si il existe un C^k -difféomorphisme φ de I_1 dans I_2 tel que $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Les classes d'équivalence pour cette relation sont les courbes géométriques.

Si on impose en plus à φ d'être strictement croissante, on obtient une nouvelle relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les courbes géométriques orientées.

Tangente. Si $\mathcal{C} = (I, f)$ est une courbe paramétrée de classe C^k , on dit que $M_0 = f(t_0)$ est *régulier* si et seulement si $f'(t_0) \neq 0$.

On appelle *tangente à $\mathcal{C}$ en $M_0 = f(t_0)$* la droite affine passant par M_0 et ayant pour vecteur directeur le vecteur $f^{(p)}(t_0)$ où $p \leq k$ est le plus petit des entiers $n \leq k$ tel que $f^{(n)}(t_0) \neq 0$. C'est aussi la droite limite des droites passant par M_0 et ayant pour vecteurs directeurs $M_0 \overrightarrow{M(t)}$ avec $M(t) = f(t)$ quand $t \rightarrow t_0$.

Ces notions de points réguliers et de tangente sont indépendantes de la représentation choisie dans la classe d'équivalence des courbes paramétrées de $\mathcal{C} = (I, f)$.

Point birégulier. Un point est dit *birégulier* si et seulement si il est régulier et $(f'(t_0), f''(t_0))$ est une famille libre.

Plan osculateur. Soit $\mathcal{C} = (I, f)$ une courbe paramétrée de classe C^k . Si tous les vecteurs dérivés au point t_0 ne sont pas colinéaires, on appelle plan osculateur au point $M_0 = f(t_0)$ le plan affine passant par M_0 dont la direction est définie par les deux premiers vecteurs dérivés $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ non colinéaires. Plus généralement, c'est la limite du plan passant par la tangente en M_0 et $M(t) = f(t)$ lorsque $t \rightarrow t_0$. De même, le plan osculateur ne dépend que de la classe d'équivalence de la courbe.

Vecteur normal à une courbe paramétrée. Pour une courbe paramétrée $\mathcal{C} = (I, f)$, on appelle vecteur normal à $\mathcal{C}$ en $M_0 = f(t_0)$ tout vecteur perpendiculaire à la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 .

2. Etude des courbes paramétrées planes.

Position d'une courbe paramétrée par rapport à la tangente en un point. Soit $\mathcal{C} = (I, f)$ une courbe paramétrée de classe suffisante. Soit $M_0 = f(t_0)$. On note p le plus petit des entiers tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ et q le plus petit des entiers strictement supérieurs à p tel que $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ soit libre. Alors au voisinage de M_0 , $\mathcal{C}$ a l'allure suivante suivant les parités de p et q .

- Si p est impair et q est pair, c'est un point d'allure normale.
- Si p est impair et q est impair, c'est un point d'inflexion.
- Si p est pair et q est impair, c'est un point de rebroussement de première espèce.
- Si p est pair et q est pair, c'est un point de rebroussement de seconde espèce.

Branches infinies. Soit $\mathcal{C} = (I, f)$ une courbe paramétrée, $t_0 \in \bar{I}$ (éventuellement, $t_0 = \pm\infty$). On dit que $\mathcal{C}$ admet une **branche infinie** lorsque $t \rightarrow t_0$ si et seulement si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty$.

On dit que $\mathcal{C}$ admet une *direction asymptotique* lorsque $t \rightarrow t_0$ si et seulement si la limite de $\frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ existe quand $t \rightarrow t_0$. On appelle alors direction asymptotique de $\mathcal{C}$ la droite vectorielle engendrée par $\vec{u} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$.

On dit que $\mathcal{C}$ admet une *asymptote* lorsque $t \rightarrow t_0$ si et seulement si il existe un vecteur $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$ et tel que, si on note $(X(t), Y(t))$ les coordonnées du point courant $M(t) = f(t)$ de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on ait

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \pm\infty, \quad Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} b \in \mathbb{R}.$$

Exercice. Montrez que si la propriété ci-dessus est vérifiée, elle l'est aussi quel que soit le vecteur $\vec{v}$ choisi non colinéaire à $\vec{u}$ et elle l'est aussi pour un autre paramétrage.

Enfin, si $\mathcal{C}$ admet une direction asymptotique mais pas d'asymptote lorsque $t \rightarrow t_0$, on dit que $\mathcal{C}$ admet une *branche parabolique*.

Exercice. En pratique, si $f(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} +\infty \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} +\infty,$$

on forme $\frac{y(t)}{x(t)}$ puis on étudie les quatre cas suivants (donnez dans chaque cas la situation précise dans laquelle on se trouve) :

- $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \pm\infty$ • $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0$
- $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} a$ et $y(t) - ax(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \pm\infty$
- $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} a$ et $y(t) - ax(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} b$

Points multiples. Soit $\mathcal{C} = (I, f)$ une courbe paramétrée. Un point M est dit point multiple de $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe u, v dans I , $u \neq v$ tels que $M = f(u) = f(v)$. Si M correspond exactement à deux valeurs distinctes du paramètre, on dit que M est un *point double* de $\mathcal{C}$. Définitions analogues pour *point triple*, *point quadruple*...

Plan d'étude d'une courbe paramétrée. En pratique, on forme $f(t) = (x(t), y(t))$.

Etude de x, y . On détermine les ensembles de définition de x, y qui en pratique sont des intervalles ou des réunions d'intervalles. On recherche d'éventuelles symétries par la considération de changement de paramétrage du genre $t \mapsto -t$, $t \mapsto \frac{1}{t}$, ... ce qui permet de déterminer un (ou des) intervalle(s) d'étude pour x, y . On fait une étude aux bornes des intervalles. On étudie x', y' , les points d'annulation de x', y' et les signes de x', y' . On fait le tableau de variations à cinq lignes t, x', x, y', y .

Etude de $\mathcal{C}$. On détermine les branches infinies et leur nature. On détermine les points non réguliers, leur nature et l'allure de la courbe au voisinage de ces points. On détermine les points multiples et leur tangentes. On trace $\mathcal{C}$.

Plan d'étude d'une courbe donnée par une équation polaire. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$. On rappelle que l'on peut se ramener à une équation paramétrique en posant $f(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$. *Etude de ρ .* On détermine l'ensemble de définition de ρ . On recherche d'éventuelle symétries de $\mathcal{C}$ par la recherche de périodes, antipériodes, formules faisant intervenir $\rho(-\theta)$, $\rho(\alpha - \theta)$ (α fixé à trouver). On recherche les valeurs de θ annulant ρ , on étudie le signe de ρ , les limites de ρ aux bornes des intervalles. On fait une étude des variations de ρ .

Etude de $\mathcal{C}$. Est-ce que $O \in \mathcal{C}$? Si oui, déterminer la ou les tangentes en O à $\mathcal{C}$. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$, les points multiples. Tracer $\mathcal{C}$.

Plan d'étude d'une courbe donnée par une équation cartésienne. On peut parfois exprimer x en fonction de y ou y en fonction de x grâce au théorème des fonctions implicites. La détermination des tangentes se fait directement à partir de l'équation cartésienne. On peut aussi se ramener au cas des courbes paramétrées (la substitution $y = tx$ donne souvent une représentation paramétrique de la courbe $((x(t), y(t)))$ en fonction

du paramètre t) ou au cas des courbes données par une équation polaire (par la substitution $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$).

3. Etude de courbes paramétrées planes classiques.

Exercice. Equations polaires d'une droite, d'un cercle, d'une conique. Montrez que l'équation polaire d'une droite ne passant pas par l'origine est $\frac{1}{\rho} = a \cos \theta + b \sin \theta$. (on pourra par une rotation bien choisie se ramener au cas d'une droite verticale). Qu'en est-il si la droite passe par l'origine? Montrez que l'équation d'un cercle passant par l'origine est $\rho = a \cos \theta + b \sin \theta$. Montrez que l'équation d'une conique admettant l'origine pour foyer est

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

où e est l'excentricité, p le paramètre, $\left(\frac{p}{e}, \theta_0\right)$ sont les coordonnées polaires de la projection de O sur la directrice associée (remarquez que si $\rho(\theta) = f_1(\theta)$ et $\rho(\theta) = f_2(\theta)$ sont les équations polaires de deux courbes avec $f_1(\theta) = -f_2(\theta + \pi)$, ces deux courbes sont les mêmes).

Exercice. Cissoïde droite. Soit le cercle de diamètre OA . Menons la tangente en A . Menons une droite quelconque OE où E est un point de la tangente en A et portons un segment OP tel que $OP = BE$ avec B le point d'intersection du cercle et de OE . Le lieu géométrique des points P ainsi construits est “la Cissoïde”. Montrez que l'équation polaire de la Cissoïde si $A(a, 0)$ est $\rho = a \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$, l'équation cartésienne est $x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$ et en trouver une équation paramétrique. Etudiez cette courbe.

Exercice. Strophoïde droite. Dans le repère (Ox, Oy) , on considère le point de coordonnées $A(0, a)$. A un point M de (Oy) , on associe les deux points C et C' de la droite AM tels que $MC = MC' = MO$. Le lieu géométrique des points C et C' s'appelle “la Strophoïde”. Montrer qu'une équation cartésienne de la Strophoïde est

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0.$$

En déduire l'équation polaire

$$\rho = a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}.$$

En déduire l'allure de la Strophoïde.

Exercice. Folium de Descartes. On appelle ainsi la courbe d'équation cartésienne $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Donner une équation paramétrique. Tracer cette courbe.

Exercice. Cycloïde. On appelle “cycloïde” la courbe décrite par un point du cercle de rayon a quand celui-ci roule sans glisser sur l'axe des x à vitesse constante égale à 1. Montrer que l'équation paramétrique de la cycloïde est $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ puis la tracer.

Exercice. Cardioïde. On appelle ainsi la courbe d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos \theta)$. En faire l'étude. Montrez que si C est le cercle de centre 1 et de rayon 1, l'ensemble des nombres complexes uv pour $u \in C$ et $v \in C$ décrit l'intérieur d'une cardioïde.

Exercice. Astroïde. On appelle ainsi la courbe paramétrée d'équations $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. En faire l'étude.

Exercice. Tractrice. Soit $\mathcal{C}$ une courbe régulière telle que $MT^2 = a^2$ où a est un nombre positif fixé et T l'intersection de la tangente en M à $\mathcal{C}$ avec l'axe des x . On suppose que cette courbe passe par le point de coordonnées $(0, a)$. On se propose de trouver les équations paramétriques d'une telle courbe.

1. Montrez qu'on a

$$(x'^2 + y'^2)y^2 = a^2 y'^2.$$

2. Montrez qu'on peut supposer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $x \in]-\alpha, \alpha[$, on ait $y(u) = a/\operatorname{ch} u$. Montrer qu'une équation paramétrique de $\mathcal{C}$ est $x = a(u - \operatorname{th} u)$, $y = \frac{a}{\operatorname{ch} u}$. La tracer.

Exercice. Lemniscate de Bernouilli. On se donne deux points A et B de coordonnées $(-a, 0)$ et $(a, 0)$ avec $a > 0$. On considère l'ensemble des points M tels que $MA \times MB = a^2$, qu'on appelle "*la Lemniscate de Bernouilli*". Montrez que l'équation de la Lemniscate de Bernouilli est

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

En déduire l'équation polaire et l'allure de la courbe.

Exercice. Spirale logarithmique. Etudier la courbe d'équation polaire $\rho = ae^{m\theta}$.

Exercice. Chaînette. Trouver l'équation de la courbe décrite par un fil quand il est pendu entre deux points.

4. Etude métrique des courbes planes.

Abscisse curviligne. Soit $\mathcal{C} = (I, f)$ une courbe paramétrée de classe C^1 . On appelle abscisse curviligne toute application $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in I$, $s'(t) = \|f'(t)\|$. Si $A = f(t_0)$ et $B = f(t_1)$ sont deux points de $\mathcal{C}$ avec $t_0 < t_1$ alors $\ell(AB) = s(t_1) - s(t_0)$ est *longueur de l'arc* AB . Elle est indépendante de la représentation paramétrique de la courbe géométrique orientée.

Exercice. On se propose de montrer que si $\mathcal{C} = ([a, b], f)$ est une courbe paramétrée de classe C^1 , si $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ est une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et si $M_i = f(t_i)$ alors la longueur $\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1}$ de la ligne polygonale joignant les points M_i converge vers $\ell(AB)$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

1. Montrez que $\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} \leq \ell(AB)$.

2. En utilisant l'uniforme continuité de f' , montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que, si le pas de la subdivision est inférieur à η , on ait

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt \leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right\| + 2\varepsilon(t_{i+1} - t_i).$$

3. Conclure.

Exercice. Vérifier qu'en coordonnées polaires, $s'(\theta) = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}$.

Exercice. Trouver une paramétrisation normale de la tractrice.

Paramétrage normal. Soit $\mathcal{C} = (I, f)$ une courbe paramétrée de classe C^1 telle que tout point soit régulier. On appelle *paramétrage normal* de $\mathcal{C}$ une paramétrisation (J, g) de $\mathcal{C}$ équivalente à la paramétrisation (I, f) telle que, pour tout $u \in J$, $\|g'(u)\| = 1$. Ce paramétrage normal existe. Il suffit de prendre une abscisse curviligne s de $\mathcal{C} = (I, f)$ et de poser $g = f \circ s^{-1}$. On dit aussi que $\mathcal{C}$ est *paramétrée par une abscisse curviligne*.

Repère de Frenet. Soit $\mathcal{C} = (I, f)$ une courbe de classe C^2 paramétrée par une abscisse curviligne s . Le vecteur $\vec{t} = f'(s)$ est le *vecteur tangent unitaire* de $\mathcal{C}$ en $M = f(s)$. On note $\vec{n}$ le vecteur image de $\vec{t}$ par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Le repère $(M, \vec{t}, \vec{n})$ est un repère orthonormé direct appelé *repère de Frenet en M* à $\mathcal{C}$.

Exercice. Montrez qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{d\vec{t}}{ds} = c\vec{n}$.

Courbure et Rayon de Courbure. La constante c définie dans l'exercice précédent est appelée *courbure*. Le nombre $R = \frac{1}{c}$ est appelé *rayon de courbure* (avec la convention $R = +\infty$ si $c = 0$).

Exercice. Montrez que

$$\begin{aligned} R &= \frac{(1 + \varphi'^2(x))^{3/2}}{\varphi''(x)} && \text{si } y = \varphi(x) \\ &= \frac{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)} && \text{si } x = x(t), y = y(t) \\ &= \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho\rho' - \rho\rho''} && \text{en coordonnées polaires.} \end{aligned}$$

On pourra par exemple montrer la seconde égalité. Poser pour cela $f(t) = F(s) = f(\varphi(s))$ où $s = \int_0^{\varphi(s)} (x'(u)^2 + y'(u)^2)^{1/2} du$ et calculer $\det(F'(s), F''(s))$.

Montrez qu'à l'origine des coordonnées, $R = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2y}$ si la tangente est Ox , $R = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{2x}$ si la tangente est Oy (utilisez le théorème d'inversion locale).

Phase. Lien entre la phase et le rayon de courbure. Soit $\mathcal{C} = (I, f)$ une courbe paramétrée par une abscisse curviligne où f est de classe C^k . Montrez qu'il existe une fonction α de classe C^{k-1} telle que $\vec{t}(s) = \cos \alpha(s)\vec{i} + \sin \alpha(s)\vec{j}$. Montrez que $R = \frac{d\alpha}{ds}$.

Centre de courbure. Cercle osculateur. Développée. On appelle **centre de courbure** le point C défini par $\overrightarrow{MC} = R\vec{n}$. On appelle *cercle osculateur* le cercle de centre le centre de courbure et de rayon le rayon de courbure. On appelle *développée d'une courbe* l'ensemble des points de courbure.

Exercice. Montrez que si on note $C_{t,h}$ le cercle passant par les trois points $M_0 = f(t-h)$, $M_1 = f(t)$ et $M_2 = f(t+h)$, alors la limite lorsque h tend vers 0 de $C_{t,h}$ existe et est le cercle osculateur.

Exercice. Formules de Frenet. Montrez que $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$ et $\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R}$.

Enveloppe d'une famille de droites. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a, b, c des fonctions de classe C^1 sur I telles que $ab' - a'b$ ne s'annule pas. Pour tout $t \in I$, on note D_t la droite d'équation $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$. On appelle *enveloppe de la famille* $(D_t)_{t \in I}$ toute courbe paramétrée sur I régulière (c'est-à-dire dont tous les points sont réguliers) et admettant D_t pour tangente au point de paramètre t .

Exercice. Sous les hypothèses précédentes, montrez que les points de l'enveloppe vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0 \end{cases}$$

Exercice. Montrez que la développée d'une courbe paramétrée régulière est l'enveloppe de ses normales.

Développantes. On appelle développante d'une courbe paramétrée une courbe dont la développée est la courbe considérée.

Exercice. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation paramétriques $x = 3t - t^3$ et $y = 3t^2$. La tracer ainsi que sa développée.

Exercice. Déterminer un paramétrage de la courbe d'équation cartésienne $x^3 + 3xy - y^2 = 0$. Déterminer le cercle osculateur en 0 et la position de la courbe par rapport à ce cercle.

5. Courbure et Torsion des courbes gauches.

Trièdre de Frenet. Soit $\mathcal{C} = (I, f)$ une courbe gauche paramétrée par une abscisse curviligne. Le vecteur tangent est $\vec{t} = f'(s)$. On appelle vecteur normal $\vec{n} = f''(s)/\|f''(s)\|$ et enfin on pose $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$. Le repère orthonormal direct $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ est appelé trièdre de Frenet.

Exercice. Formules de Frenet. Montrez que

$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R} + \frac{\vec{b}}{T} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T} \end{cases}$$

où T est le rayon de torsion donné par définition par la deuxième ligne du système précédent.

Calcul de R et de T . Lorsque $\mathcal{C} = (I, f)$ n'est pas nécessairement paramétrée par une abscisse curviligne, montrez qu'on a les formules suivantes :

$$R = \frac{\|f''(t)\|^3}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|} \quad T = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|^2}{\text{Det}(f'(t), f''(t), f'''(t))}.$$

On pourra poser $f(t) = F(s) = f(\varphi(s))$ où $s = \int_0^{\varphi(s)} (x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2)^{1/2} du$, remarquer que $\vec{t} = F'(s)$, $F''(s) = \frac{1}{R} \frac{d\vec{n}}{ds} + (*)\vec{n}$ et calculer $\det(F'(s), F''(s), F'''(s))$ de

deux manières différentes pour obtenir T . Le calcul de R se fait comme dans le cas des courbes planes.

Centre de Courbure. Par définition, le centre de courbure C vérifie $\overrightarrow{MC} = R\vec{n}$.

Hélices. On appelle *hélice* toute courbe de l'espace de classe C^1 régulière telle qu'il existe un vecteur unitaire fixe $\vec{k}$ tel que l'angle $(\vec{k}, f'(t))$ soit constant.

Exercice. Hélice circulaire à pas constant. Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, $h \in \mathbb{R}^*$. Montrez que la courbe

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = ht$$

est une hélice qu'on appelle *hélice circulaire à pas constant*.

Exercice. Montrez que la courbe

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t, \quad z = e^{-t}$$

est une hélice tracée sur le cône d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

6. Surfaces.

Nappes paramétrées. On appelle *nappe paramétrée de classe C^k* un couple $\mathcal{S} = (D, f)$ où D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application de classe C^k . L'ensemble $f(D)$ est appelé support de la nappe paramétrée.

On dit que deux nappes paramétrées (D_1, f_1) et (D_2, f_2) de classe C^k sont équivalentes s'il existe un C^k -difféomorphisme φ de D_2 sur D_1 tel que $f_2 = f_1 \circ \varphi$. La relation binaire ainsi définie est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence s'appellent *les nappes géométriques de classe C^k* .

Si l'on impose à φ d'avoir un jacobien strictement positif, on obtient encore une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence s'appellent *nappes géométriques orientées*.

Plan tangent. Soit $\mathcal{S} = (D, f)$ une nappe paramétrée de classe C^1 . On dit qu'un point $M = f(u, v)$ est *régulier* si $(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v})$ est une famille libre.

On appelle *plan tangent* à la nappe paramétrée en un point régulier $M = f(u, v)$ le plan affine passant par M et engendré par $(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v})$.

Ces notions sont invariantes par changement de paramètre.

On appelle *courbe d'une nappe paramétrée* $\mathcal{S} = (D, f)$ une courbe paramétrée de la forme $\mathcal{C}(I, f \circ g)$ où (I, g) est une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ dont le support est inclus dans D .

Exercice. Soit t un point de I . Si f et g sont de classe C^1 , si le point $g(t)$ est régulier sur (I, g) et si le point $M = (f \circ g)(t)$ est régulier sur (D, f) , le point M est régulier sur $\mathcal{C}$ et la tangente en M à $\mathcal{C}$ est contenue dans le plan tangent en M à $\mathcal{S}$.

Exercice. Si la nappe est définie de manière implicite par $f(x, y, z) = 0$ en un point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) où l'un au moins des trois nombres

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

est non nul, le plan tangent a pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Normale. On appelle *normale* en un point régulier M à une nappe paramétrée $\mathcal{S}$ la perpendiculaire passant par M au plan tangent à $\mathcal{S}$ en M . Elle admet pour vecteur directeur $\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}$.

Exercice. Tangente à la courbe intersection de deux surfaces. On considère deux surfaces d'équations $f(x, y, z) = 0$ et $g(x, y, z) = 0$, où f et g sont de classe C^1 . Soit M_0 un point commun à ces surfaces. Si les plans tangents en M_0 sont distincts, il existe une courbe de classe C^1 passant par M_0 et contenue dans l'intersection des surfaces, et cette courbe admet pour tangente en M_0 l'intersection des plans tangents.

Exercice. Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que la courbe de représentation paramétrique

$$x(t) = \frac{P(t)}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{Q(t)}{1+t^2}, \quad z(t) = \frac{R(t)}{1+t^2}$$

est plane.

Exercice. Reconnaître la courbe d'équation

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - \frac{z}{4} = 0 \\ x^2 + xy + z^2 - \frac{y}{4} = 0 \end{cases}$$

Exercice. Trouver des équations cartésiennes des surfaces de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^4 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$$

Exercice. Pour $k > h > 0$ et $0 < \nu^2 < h^2 < \mu^2 < k^2 < \rho^2$, montrez que les trois surfaces

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - h^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - k^2} = 1 \\ \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - h^2} - \frac{z^2}{k^2 - \mu^2} = 1 \\ \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{h^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{k^2 - \nu^2} = 1 \end{cases}$$

sont sécantes et sont deux à deux orthogonales.

Position locale d'une surface par rapport à son plan tangent. Considérons une surface d'équation cartésienne $z = \varphi(x, y)$ où $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On cherche à étudier la position du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point $(a, b, \varphi(a, b))$ avec $(a, b) \in U$ au voisinage de (a, b) . On note $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b)$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b)$ (notations de Monge). Posons, pour $(x, y) \in U$, $x = a + h$ et $y = b + k$. Si (x, y, z_S) est un point de la surface alors $z_S = \varphi(a + h, b + k)$ tandis que si (x, y, z_T) est un point du plan tangent, alors

$z_T = c + ph + qk$. En particulier, $z_S - z_T = \varphi(a + h, b + k) - c - ph - qk$. Toujours en prenant les notations de Monge, $r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(a, b)$, $s = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(a, b)$ et $t = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(a, b)$, on a

$$z_S - z_T = \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o_{(h,k) \rightarrow (0,0)}(h^2 + k^2).$$

Donc si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, S est située au-dessus du plan tangent. Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, S est située au-dessous du plan tangent. Tandis que si $s^2 - rt > 0$, alors S traverse le plan tangent.

7. Quadriques.

Définition. On appelle *quadrique* toute surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$ où F est un polynôme de degré 2.

Une quadrique admet une équation cartésienne de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

avec $(A, B, C, D, E, F) \neq 0$. On remarque qu'une sphère est une quadrique et que la réunion de deux plans aussi. Enfin l'intersection d'une quadrique et d'un plan est $\emptyset$, un plan ou une conique.

On recherche un éventuel centre de symétrie : Le point (x_0, y_0, z_0) est centre de symétrie si et seulement si

$$Q \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G \\ -H \\ -I \end{pmatrix}$$

avec

$$Q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}.$$

En particulier, si Q est inversible, la quadrique admet un centre de symétrie, tandis que si Q n'est pas inversible, elle n'en admet pas (le cylindre parabolique $x^2 - 2y = 0$ par exemple) ou alors elle en admet une infinité (le cylindre de révolution $x^2 + y^2 = 1$ par exemple).

Etude des quadriques à centre. La matrice Q étant inversible symétrique réelle, on la diagonalise dans une base orthonormée. La quadrique admet donc pour équation cartésienne dans un repère orthonormé

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + J = 0$$

On peut supposer, quitte à multiplier par -1 et à permuter les rôles de x, y, z que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. La quadrique admet alors pour équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon'$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon' \in \{-1, 0, 1\}$. D'où le tableau :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, 0, 1$$

Vide, Singleton, Ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, 0, 1$$

Hyperboloïde à deux nappes, Cône, Hyperboloïde à une nappe

Autres quadriques. Dans ce cas, la quadrique a pour équation réduite

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + 2G'x + 2H'y + 2I'z + J = 0.$$

Si $\text{rg } Q = 2$ et si $I' \neq 0$ alors en changeant le sommet du repère, on a une équation réduite de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = \varepsilon' \frac{2z}{c}$$

avec $a, b, c > 0$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon' \in \{-1, 1\}$. D'où le tableau

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, -2\frac{z}{c} \quad \text{Paraboloïde elliptique, paraboloïde hyperbolique}$$

Si $\text{rg } Q = 2$ et si $I' = 0$ alors en changeant le sommet du repère, on a une équation réduite de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = \varepsilon'$$

d'où le tableau

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cylindre elliptique}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cylindre hyperbolique}$$

Enfin si $\text{rg } Q = 1$, en changeant le sommet du repère, l'équation réduite devient

$$X^2 = 2py$$

qui est un cylindre parabolique.

Exercice. Etude des quadriques

- a. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$
- b. $7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0$
- c. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 1 = 0$
- d. $x^2 - 4x - 3y + 4z - 2 = 0$.

8. Références.

- L. Chambadal, Formulaire de Mathématiques, Dunod.
 G. Laville, Courbes et surfaces, Ellipses.
 J. M. Monier, Géométrie, MPSI, MP, 3ème édition, Dunod.
 J. Quinet, Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Tome 6, Dunod.
 Ramis, Deschamps, Odoux, Cours de mathématiques, Tome 5, Dunod.