

Géométrie Différentielle.

6. Courbure et Torsion des courbes gauches.

Trièdre de Frenet. Soit $\mathcal{C} = (I, f)$ une courbe gauche paramétrée par une abscisse curviligne. Le vecteur tangent est $\vec{t} = f'(s)$. On appelle vecteur normal $\vec{n} = f''(s)/\|f''(s)\|$ et enfin on pose $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$. Le repère orthonormal direct $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ est appelé trièdre de Frenet.

Exercice. Formules de Frenet. Montrez que

$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = & \frac{\vec{n}}{R} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = & -\frac{\vec{t}}{R} + \frac{\vec{b}}{T} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = & -\frac{\vec{n}}{T} \end{cases}$$

où T est le rayon de torsion donné par définition par la deuxième ligne du système précédent.

Calcul de R et de T . Lorsque $\mathcal{C} = (I, f)$ n'est pas nécessairement paramétrée par une abscisse curviligne, montrez qu'on a les formules suivantes :

$$R = \frac{\|f''(t)\|^3}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|} \quad T = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|^2}{\text{Det}(f'(t), f''(t), f'''(t))}.$$

Centre de Courbure. Par définition, le centre de courbure C vérifie $\overrightarrow{MC} = R\vec{n}$.

Hélices. On appelle *hélice* toute courbe de l'espace de classe C^1 régulière telle qu'il existe un vecteur unitaire fixe $\vec{k}$ tel que l'angle $(\vec{k}, f(t))$ soit constant.

Exercice. Hélice circulaire à pas constant. Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, $h \in \mathbb{R}^*$. Montrez que la courbe

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = ht$$

est une hélice qu'on appelle *hélice circulaire à pas constant*.

Exercice. Montrez que la courbe

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t, \quad z = e^{-t}$$

est une hélice tracée sur le cône d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

7. Surfaces.

Nappes paramétrées. On appelle *nappe paramétrée de classe C^k* un couple $\mathcal{S} = (D, f)$ où D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application de classe C^k . L'ensemble $f(D)$ est appelé support de la nappe paramétrée.

On dit que deux nappes paramétrées (D_1, f_1) et (D_2, f_2) de classe C^k sont équivalentes s'il existe un C^k -difféomorphisme φ de D_2 sur D_1 tel que $f_2 = f_1 \circ \varphi$. La relation binaire ainsi définie est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence s'appellent *les nappes géométriques de classe C^k* .

Si l'on impose à φ d'avoir un jacobien strictement positif, on obtient encore une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence s'appellent *nappes géométriques orientées*.

Plan tangent. Soit $\mathcal{S} = (D, f)$ une nappe paramétrée de classe C^1 . On dit qu'un point $M = f(u, v)$ est *régulier* si $(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v})$ est une famille libre.

On appelle *plan tangent* à la nappe paramétrée en un point régulier $M = f(u, v)$ le plan affine passant par M et engendré par $(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v})$.

Ces notions sont invariantes par changement de paramètre.

On appelle *courbe d'une nappe paramétrée $\mathcal{S} = (D, f)$* une courbe paramétrée de la forme $\mathcal{C}(I, f \circ g)$ où (I, g) est une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ dont le support est inclus dans D .

Exercice. Soit t un point de I . Si f et g sont de classe C^1 , si le point $g(t)$ est régulier sur (I, g) et si le point $M = (f \circ g)(t)$ est régulier sur (D, f) , le point M est régulier sur $\mathcal{C}$ et la tangente en M à $\mathcal{C}$ est contenue dans le plan tangent en M à $\mathcal{S}$.

Exercice. Si la nappe est définie de manière implicite par $f(x, y, z) = 0$ en un point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) où l'un au moins des trois nombres

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

est non nul, le plan tangent a pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Normale. On appelle *normale* en un point régulier M à une nappe paramétrée $\mathcal{S}$ la perpendiculaire passant par M au plan tangent à $\mathcal{S}$ en M . Elle admet pour vecteur directeur $\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}$.

Exercice. Tangente à la courbe intersection de deux surfaces. On considère deux surfaces d'équations $f(x, y, z) = 0$ et $g(x, y, z) = 0$, où f et g sont de classe C^1 .

Soit M_0 un point commun à ces surfaces. Si les plans tangents en M_0 sont distincts, il existe une courbe de classe C^1 passant par M_0 et contenue dans l'intersection des surfaces, et cette courbe admet pour tangente en M_0 l'intersection des plans tangents.

Exercice. Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que la courbe de représentation paramétrique ■

$$x(t) = \frac{P(t)}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{Q(t)}{1+t^2}, \quad z(t) = \frac{R(t)}{1+t^2}$$

est plane.

Exercice. Reconnaître la courbe d'équation

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - \frac{z}{4} = 0 \\ x^2 + xy + z^2 - \frac{y}{4} = 0 \end{cases}$$

Exercice. Trouver des équations cartésiennes des surfaces de représentation paramétrique ■

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^4 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$$

Exercice. Pour $k > h > 0$ et $0 < \nu^2 < h^2 < \mu^2 < k^2 < \rho^2$, montrez que les trois surfaces

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - h^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - k^2} = 1 \\ \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - h^2} - \frac{z^2}{k^2 - \mu^2} = 1 \\ \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{h^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{k^2 - \nu^2} = 1 \end{cases}$$

sont sécantes et sont deux à deux orthogonales.

Position locale d'une surface par rapport à son plan tangent. Considérons une surface d'équation cartésienne $z = \varphi(x, y)$ où $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On cherche à étudier la position du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point $(a, b, \varphi(a, b))$ avec $(a, b) \in U$ au voisinage de (a, b) . On note $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b)$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b)$ (notations de Monge). Posons, pour $(x, y) \in U$, $x = a + h$ et $y = b + k$. Si (x, y, z_S) est un point de la surface alors $z_S = \varphi(a + h, b + k)$ tandis que si (x, y, z_T) est un point du plan tangent, alors $z_T = c + ph + qk$. En particulier, $z_S - z_T = \varphi(a + h, b + k) - c - ph - qk$. Toujours en prenant les notations de Monge, $r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(a, b)$, $s = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(a, b)$ et $t = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(a, b)$, on a

$$z_S - z_T = \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{o}(h^2 + k^2).$$

Donc si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, S est située au-dessus du plan tangent. Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, S est située au-dessous du plan tangent. Tandis que si $s^2 - rt > 0$, alors S traverse le plan tangent.

8. Quadriques.

Définition. On appelle *quadrique* toute surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$ où F est un polynôme de degré 2.

Une quadrique admet une équation cartésienne de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

avec $(A, B, C, D, E, F) \neq 0$. On remarque qu'une sphère est une quadrique et que la réunion de deux plans aussi. Enfin l'intersection d'une quadrique et d'un plan est $\emptyset$, un plan ou une conique.

On recherche un éventuel centre de symétrie : Le point (x_0, y_0, z_0) est centre de symétrie si et seulement si

$$Q \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G \\ -H \\ -I \end{pmatrix}$$

avec

$$Q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}.$$

En particulier, si Q est inversible, la quadrique admet un centre de symétrie, tandis que si Q n'est pas inversible, elle n'en admet pas (le cylindre parabolique $x^2 - 2y = 0 = 0$ par exemple) ou alors elle en admet une infinité (le cylindre de révolution $x^2 + y^2 = 1$ par exemple).

Etude des quadriques à centre. La matrice Q étant inversible symétrique réelle, on la diagonalise dans une base orthonormée. La quadrique admet donc pour équation cartésienne dans un repère orthonormé

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + J = 0$$

On peut supposer, quitte à multiplier par -1 et à permuter les rôles de x, y, z que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. La quadrique admet alors pour équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon'$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon' \in \{-1, 0, 1\}$. D'où le tableau :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, 0, 1$$

Vide, Singleton, Ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, 0, 1$$

Hyperboloïde à deux nappes, Cône, Hyperboloïde à une nappe

Autres quadriques. Dans ce cas, la quadrique a pour équation réduite

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + 2G'x + 2H'y + 2I'Z + J = 0.$$

Si $\text{rg } Q = 2$ et si $I' \neq 0$ alors en changeant le sommet du repère, on a une équation réduite de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = \varepsilon' \frac{2z}{c}$$

avec $a, b, c > 0$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon' \in \{-1, 1\}$. D'où le tableau

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, -2\frac{z}{c}$$

Paraboloïde elliptique, paraboloïde hyperbolique

Si $\text{rg } Q = 2$ et si $I' = 0$ alors en changeant le sommet du repère, on a une équation réduite de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = \varepsilon'$$

d'où le tableau

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cylindre elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cylindre hyperbolique

Enfin si $\text{rg } Q = 1$, en changeant le sommet du repère, l'équation réduite devient

$$X^2 = 2py$$

qui est un cylindre parabolique.

Exercice. Etude des quadriques

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$
- $7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 1 = 0$
- $x^2 - 4x - 3y + 4z - 2 = 0.$

9. Références.

- L. Chambadal, Formulaire de Mathématiques, Dunod.
 G. Laville, Courbes et surfaces, Ellipses.
 J. M. Monier, Géométrie, MPSI, MP, 3ème édition, Dunod.
 J. Quinet, Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Tome 6, Dunod.
 Ramis, Deschamps, Odoux, Cours de mathématiques, Tome 5, Dunod.