Université de Provence 2009–2010

Mathématiques Générales 1 - Parcours PEI

GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{R}^2$ désigne le plan et $\mathbb{R}^3$ l'espace.

1 Produit scalaire.

Définition. Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan, on note

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

le produit scalaire de ces deux vecteurs.

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de l'espace, on note

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

le produit scalaire de ces deux vecteurs.

Les propriétés suivantes du produit scalaire se vérifient directement, que ce soit dans le plan ou dans l'espace :

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \qquad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}.$$

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \qquad \overrightarrow{u} \cdot (\alpha\overrightarrow{v}) = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = (\alpha\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v}.$$

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}), \qquad \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}.$$

Il découle du théorème de Pythagore que, si $\|\overrightarrow{u}\|$ désigne la "longueur" du vecteur $\overrightarrow{u}$, que ce soit dans le plan ou dans l'espace, on a :

$$\forall\overrightarrow{u}, \qquad \|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$$

2 Repères orthonormés.

Définition. Dans le plan, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base orthonormée si et seulement si ,

$$\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0.$$

Dans l'espace, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée si et seulement si

$$\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = \|\overrightarrow{k}\| = 1, \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0, \quad \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = 0, \quad \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0.$$

Théorème. *Soit* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *est une base orthonormée du plan. Soit* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs du plan. Si* (x, y) *et* (x', y') *sont les coordonnées de* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *ce qui veut dire que* $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$, *alors*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'.$$

De même dans l'espace. Ceci veut dire que l'expression du produit scalaire est indépendante de la base orthonormée du plan ou de l'espace choisie et des coordonnées des vecteurs dans cette base.

Preuve. En effet, si $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$, il découle des propriétés du produit scalaire que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) \cdot (x'\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) = xx' \underbrace{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i}}_{=\|\overrightarrow{i}\|^2=1} + xy' \underbrace{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j}}_{=0} + x'y \underbrace{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i}}_{=0} + yy' \underbrace{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j}}_{=\|\overrightarrow{j}\|^2=1} = xx' + yy'.$$

La preuve est totalement analogue pour deux vecteurs de l'espace. □

Corollaire. *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs de l'espace ou du plan. On note* α *une détermination de l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ *dans un plan* P *qui contient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$. *Alors*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\alpha.$$

En particulier, $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Preuve. En effet, posons $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$. Prenons $\overrightarrow{j}$ un vecteur d'un plan P contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui soit orthogonal à $\overrightarrow{i}$ et de norme 1. Enfin, si on est dans l'espace, on prend $\overrightarrow{k}$ un vecteur de norme 1 qui soit orthogonal à $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

Dans cette base orthonormée, on a $\overrightarrow{u} = \|u\|\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|(\cos(\pm\alpha)\overrightarrow{i} + \sin(\pm\alpha)\overrightarrow{j}) = \|\overrightarrow{v}\|(\cos(\alpha)\overrightarrow{i} \pm \sin(\alpha)\overrightarrow{j})$ (faire un dessin). En particulier $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (\|u\|\overrightarrow{i}) \cdot (\|\overrightarrow{v}\|(\cos(\alpha)\overrightarrow{i} \pm \sin(\alpha)\overrightarrow{j})) = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\alpha$. □

3 Produit vectoriel dans l'espace.

On se place donc dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Définition. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle *produit vectoriel* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on note $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$

Pour se souvenir,

$$\begin{array}{cc} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \\ x & x' \\ y & y' \end{array}$$

Nous avons les propriétés suivantes du produit vectoriel :

$$\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}), \qquad \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}.$$

$$\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}), \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}, \qquad \overrightarrow{u}\wedge(\alpha\overrightarrow{v}) = \alpha(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}) = (\alpha\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v}.$$

$$\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}), \qquad \overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}.$$

Ces propriétés se vérifient toutes par calcul sur les coordonnées.

Théorème. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, alors $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.*

Preuve. En effet, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} yz'-y'z \\ zx'-z'x \\ xy'-x'y \end{pmatrix}$ donc

$$\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} yz'-y'z \\ zx'-z'x \\ xy'-x'y \end{pmatrix} = xyz'-xy'z+x'yz-xyz'+xy'z-x'yz=0.$$

La preuve de $\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})=0$ est analogue.

□

Théorème (Identité de Lagrange). *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, alors*

$$\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\times\|\overrightarrow{v}\|^2-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2.$$

Preuve. En effet, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} yz'-y'z \\ zx'-z'x \\ xy'-x'y \end{pmatrix}$ donc

$$\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|^2 = (yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2$$

$$= x^2y'^2+x'^2y^2+x^2z'^2+x'^2z^2+y^2z'^2+y'^2z^2-2xx'yy'-2xx'zz'-2yy'zz'.$$

Or

$$\|\overrightarrow{u}\|^2\times\|\overrightarrow{v}\|^2-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2 = (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(xx'+yy'+zz')^2$$

$$= x^2x'^2+x^2y'^2+x^2z'^2+y^2x'^2+y^2y'^2+y^2z'^2+z^2x'^2+z^2y'^2+z^2z'^2-x^2x'^2-y^2y'^2-z^2z'^2-2xx'yy'-2xx'zz'-2yy'zz'$$

$$= x^2y'^2+x^2z'^2+y^2x'^2+y^2z'^2+z^2x'^2+z^2y'^2-2xx'yy'-2xx'zz'-2yy'zz'.$$

D'où l'égalité de Lagrange. □

Corollaire. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On note α une détermination de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ dans un plan P qui contient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Alors*

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times |\sin \alpha|.$$

En particulier, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 0$.

Preuve. En effet,$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \cos^2 \alpha = \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \sin^2 \alpha$. □

Corollaire. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soit O un point de l'espace, et A, B, C trois autres points de l'espace tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{u}$. Alors le parallélogramme $OABC$ a pour aire $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$.*

Preuve. En effet, la hauteur du parallélogramme a pour longueur $OB|\sin \alpha|$ et pour base OA, donc son aire est $OA \times OB \times |\sin \alpha| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin \alpha| = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$. □

Géométriquement, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ désigne le vecteur de l'espace orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et tel que $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin \alpha$ où désigne l'angle formé par les deux vecteurs. La convention d'orientation est la suivante : si $\overrightarrow{u}$ coïncide avec le pouce de la main droite et $\overrightarrow{v}$ avec l'index, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ pointe dans le sens du majeur. (convention admise)

4 Rappels

4.1 Distance d'un point à une droite dans le plan.

Définition. Un *vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à une droite $\mathscr{D}$* de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

L'équation d'une droite $\mathscr{D}$ dans le plan est de la forme $ax+by+c = 0$ où a, b, c sont trois réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

(a, b) est un vecteur normal à $\mathscr{D}$ et $(-b, a)$ un vecteur directeur.

Théorème. *Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ un point du plan. Alors la distance $d(A, \mathscr{D})$ de A à $\mathscr{D}$ est*

$$d(A, \mathscr{D}) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Preuve. En effet, la distance de A à la droite $\mathscr{D}$ est la distance AH de A au projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{D}$.

Si $H \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}$, comme $H \in \mathscr{D}$, on a $ax_H + by_H + c = 0$.

Soit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\mathscr{D}$, on a l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{n}$, ce qui nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} x_H - x_A = \lambda a \\ y_H - y_A = \lambda b \end{array} \right. ,$$

soit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} x_H = x_A + \lambda a \\ y_H = y_A + \lambda b \end{array} \right. .$$

En reportant cela dans l'équation $ax_H + by_H + c = 0$, nous obtenons

$$0 = a(x_A + \lambda a) + b(y_A + \lambda b) + c = ax_A + by_A + c + \lambda(a^2 + b^2),$$

ce qui nous donne $\lambda = -\dfrac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2}$.

Nous avons alors

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} = |\lambda|\sqrt{a^2 + b^2},$$

donc

$$d(A, \mathscr{D}) = AH = \left| -\frac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□

4.2 Plans et droites dans l'espace.

Définition et Théorème. L'équation d'un plan $\mathscr{P}$ dans l'espace est $ax+by+cz+d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ de l'espace est *un vecteur de* $\mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux points M, M' de $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'}$.

En particulier, $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$ si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

On dit que $\overrightarrow{n}$ est *un vecteur normal de* $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{n}$ est non nul et orthogonal à tous les vecteurs de $\mathscr{P}$.

En particulier, l'ensemble des vecteurs normaux de $\mathscr{P}$ est l'ensemble des multiples du vecteur $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Preuve.

En effet, si $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux points du plan $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'}$, on a

$$ax' + by' + cz' + d = 0 \qquad \text{et} \qquad ax + by + cz + d = 0,$$

et donc en faisant la soustraction de ces deux équations, on a

$$a(x'-x)+b(y'-y)+c(z'-z)=a\alpha+b\beta+c\gamma=0.$$

Réciproquement, si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ et si $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est un point de $\mathscr{P}$, le point $M'\begin{pmatrix}x+\alpha\\y+\beta\\z+\gamma\end{pmatrix}$ vérifie $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{MM'}$. De plus $M'\in\mathscr{P}$ car $a(x+\alpha)+b(y+\beta)+c(z+\gamma)+d=ax+by+cz+d+a\alpha+b\beta+c\gamma=0$. On a bien prouvé que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$ si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$.

Il découle en particulier de cela que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathscr{P}$. □

Définition. Soit $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. On appelle *droite* $\mathscr{D}$ *passant par* A *et ayant pour vecteur directeur* $\overrightarrow{u}$ l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}$.

$$\mathscr{D}=\{M\,/\,\exists t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}\}.$$

Si M a pour coordonnées (x,y,z) alors

$$M\in\mathscr{D}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}$$

Le système précédent est appelé *équation paramétrique de* $\mathscr{D}$.

Définition. De façon analogue, le point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}'\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ non colinéaires définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases}x=x_A+\lambda a+\mu a'\\y=y_A+\lambda b+\mu b'\\z=z_A+\lambda c+\mu c'\end{cases}$$

On montre, exactement comme dans le plan, le théorème suivant :

Théorème. *Soit* $\mathscr{P}$ *un plan d'équation* $ax+by+cz+d=0$ *avec* $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ *et soit* $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ *un point de l'espace. Alors la distance* $d(A,\mathscr{P})$ *de* A *à* $\mathscr{P}$ *est*

$$d(A,\mathscr{P}) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Preuve. En effet, la distance de A au plan $\mathscr{P}$ est la distance AH de A au projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.

Si $H\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix}$, comme $H\in\mathscr{P}$, on a $ax_H+by_H+cy_H+d=0$.

Soit $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\mathscr{P}$, on a l'existence de $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{n}$, ce qui nous donne

$$\begin{cases} x_H-x_A=\lambda a \\ y_H-y_A=\lambda b \\ z_H-z_A=\lambda c \end{cases},$$

soit encore

$$\begin{cases} x_H=x_A+\lambda a \\ y_H=y_A+\lambda b \\ z_H=z_A+\lambda c \end{cases}.$$

En reportant cela dans l'équation $ax_H+by_H+cz_H+d=0$, nous obtenons

$$0=a(x_A+\lambda a)+b(y_A+\lambda b)+c(z_A+\lambda c)+d=ax_A+by_A+cz_A+\lambda(a^2+b^2+c^2),$$

ce qui nous donne $\lambda=-\dfrac{ax_A+by_A+cz_A+d}{a^2+b^2+c^2}$.

Nous avons alors

$$AH=\sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2+(z_H-z_A)^2}=\sqrt{(\lambda a)^2+(\lambda b)^2+(\lambda c)^2}=|\lambda|\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

donc

$$d(A,\mathscr{P})=AH=\left|-\frac{ax_A+by_A+cz_A+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

□